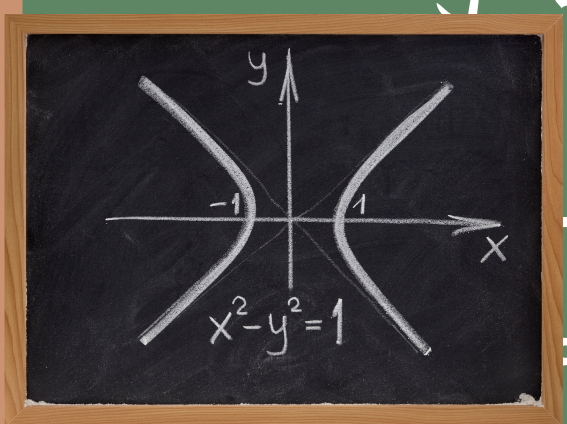
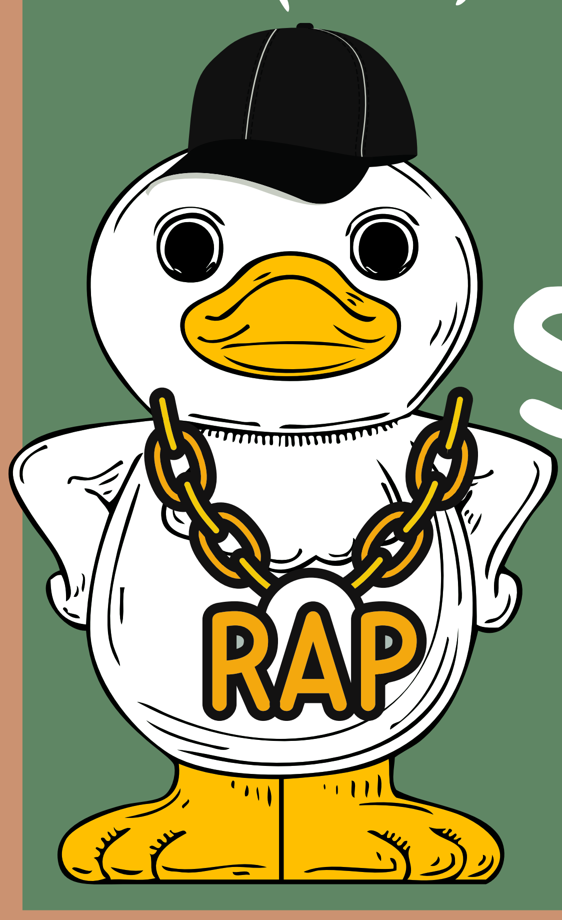
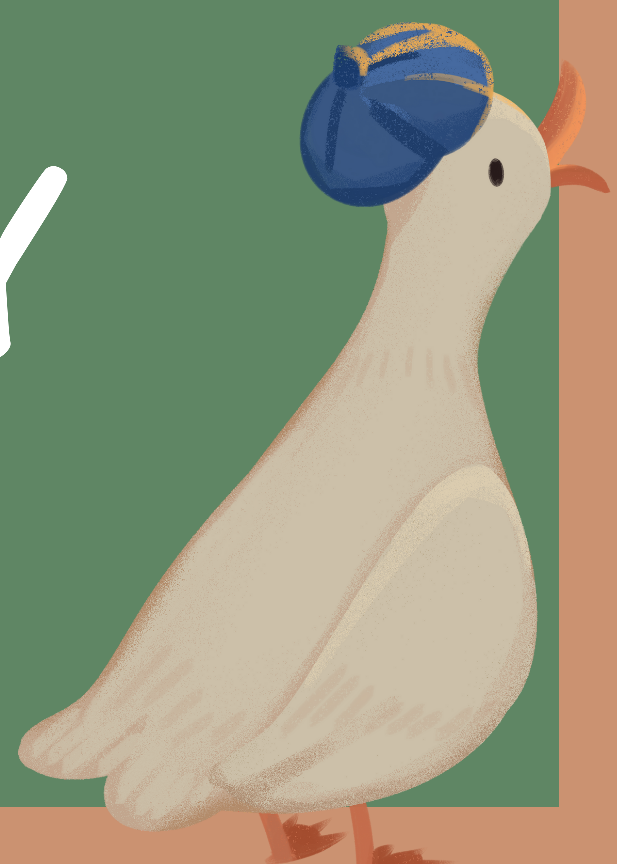
# PatoAux Auxiliar 4 Cónicas




Ustedes pueden!




# SON SECOS Y SECAS!



**MA1001-4 Introducción al Cálculo, Primavera 2022**
**Profesor:** Leonardo Sánchez Cancino
**Auxiliares:** Javier Santidrián Salas y Patricio Yáñez Alarcón

# Auxiliar Extra C1

Miércoles 21 de Septiembre de 2022

**P1. Cónicas**

Considere la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a > b > 0$. Encuentre el lugar geométrico (describiendo la cónica completamente) de los puntos medios de los trazos $\overline{VQ}$, donde $V$ es el vértice izquierdo de la hipérbola y $Q = (x, y)$ un punto cualquiera de ella.

**P2. Funciones**

Considere la función definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$$

*a*) Determine dominio, ceros, signos, asíntotas y el recorrido de $f$.

*b*) Demuestre que $f$ es monótona en $Dom(f) \cap (-1, \infty)$ y en $Dom(f) \cap (-\infty, -1)$.

*c*) Con los antecedentes de las partes anteriores, haga un gráfico aproximado de $f$.

**P3.** Considere los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (-a, 0)$ donde $a > 0$. Encuentre el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$ tal que las pendientes de las rectas $L_{PA} \wedge L_{PB}$ satisfacen la siguiente relación.

$$m_{PA} = \frac{m_{PB}}{1 - m_{PB}^2}$$

**P4. [Para volar con parábolas] .El objetivo de esta pregunta es que puedan comprender la abstracción de geometría analítica, en particular como se comporta una función cuadrática**
MA1001-C2-2008-1
Considere un parábola de ecuación $y = x^2$ y el punto A de coordenadas $(1, 0)$.
Si por el punto A se traza una recta L de pendiente variable $m \in \mathbb{R}$, se pide lo siguiente:

*a*) Determine el conjunto C de todos los m, tales que la recta L y la parábola se intersectan en al menos un punto.

*b*) Si $m \in \mathbb{R}$, sean P y Q los puntos donde la recta y la parábola se intersectan y M el punto medio del trazo PQ(ver figura). Determine las coordenadas $(x_M, y_M)$ de M en términos de m.

*c*) De las ecuaciones anteriores(eliminando el parámetro m), encuentre en que curva se mueve el punto M(indique la ecuación e identifíquela). Además, considerando que $C \neq \mathbb{R}$, determine cual zona de esta curva es realmente recorrida por M.

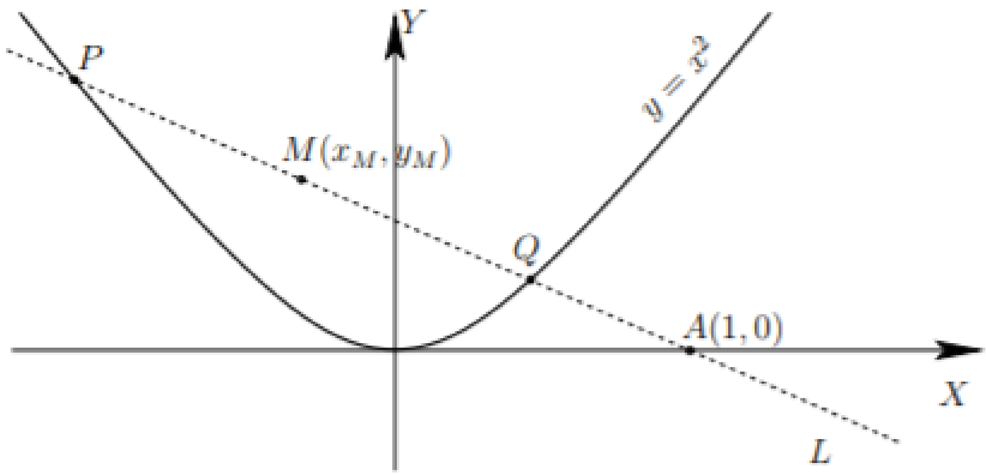



Figura 1: Parábola y recta

LUGARES GEOMÉTRICOS

-Un lugar geométrico se define como un conjunto de puntos en el plano XY que satisfacen alguna condición o propiedad determinada. Por ejemplo, una circunferencia es un lugar geométrico en el que todos sus puntos son equidistantes a un mismo punto externo a ella, llamado centro.

Los problemas de lugares geométricos que ustedes deben resolver constan básicamente en lo siguiente: Un determinado sistema geométrico define un punto G. Algún integrante de este sistema varía (por ejemplo, una recta que cambia su pendiente), produciendo un cambio en la posición del punto G. El "movimiento" de este punto G debido a este integrante variante define un cierto lugar geométrico en el espacio.

Metodología:

*a*) En primer lugar, dibujar el problema detalladamente, intentando respetar las proporciones.

*b*) Identificar claramente el integrante del problema que está variando. Este integrante tendrá asociado un valor que está cambiando, llamado parámetro móvil, el que denotaremos con la letra T.

*c*) Identificar el punto G, que es el que describe el lugar geométrico. A las coordenadas de G las llamaremos (x barra, y barra).

*d*) El siguiente paso es encontrar una expresión para las coordenadas de G en función de los datos del problema. Para esto, debe mirarse las condiciones del problema y establecer las ecuaciones correspondientes que relacionen las coordenadas de G con los datos del problema.

*e*) Finalmente, debemos encontrar una única relación que ligue las coordenadas de G. Es IMPORTANTE que en esta relación no esté presente el parámetro móvil T. Para hacer esto, se aconseja despejar el parámetro T en función de cada coordenada de G. Luego, igualar ambas expresiones.

NOTA: Este método es válido para la mayoría de este tipo de problemas, pero no para todos. Hay algunos en que el procedimiento varía un poco algún paso, pero, en líneas generales, es casi lo mismo.

Espero que se haya entendido. Cualquier duda que tengan, manifiéstenla en el foro. Suerte el control.

**Resumen**

Hipérbola: $e > 1$

*Horizontales* ; *Verticales*

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \quad ; \quad \frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_o)^2}{a^2}=1$$

Excentricidad: $e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ ; $e=\dfrac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}$

Centrada en: $(x_o, y_o)$ ; $(x_o, y_o)$

Focos: $(x_o \pm ae, y_o)$ ; $(x_o, y_o \pm be)$

Directrices: $x = x_o \pm \dfrac{a}{e}$ ; $y = y_o \pm \dfrac{b}{e}$

Elipse: $0 < e < 1$

$a > b$ (Semi eje mayor: $a$) ; $a < b$ (semi eje mayor: $b$)

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \quad ; \quad \frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Excentricidad: $e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ ; $e=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$

Centrada en: $(x_o, y_o)$ ; $(x_o, y_o)$

Focos: $(x_o \pm ae, y_o)$ ; $(x_o, y_o \pm be)$

Directrices: $x = x_o \pm \dfrac{a}{e}$ ; $y = y_o \pm \dfrac{b}{e}$

## Propuestos

**P1.** Encuentre los valores $\lambda \in \mathbb{R}$, tales que: $\lambda x^2 + 4x + \lambda > 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$

## Recuerdos y Consejos

**Parábola**

| | Vertical | | Horizontal | |
|---|---|---|---|---|
| Ecuación | $y - y_0 = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2$ | | $x - x_0 = \frac{1}{4p}(y - y_0)^2$ | |
| Vértice | $(x_0, y_0)$ | | $(x_0, y_0)$ | |
| Foco | $(x_0, y_0 + p)$ | | $(x_0 + p, y_0)$ | |
| Directriz | $y = y_0 - p$ | | $x = x_0 - p$ | |
| Sentido de las ramas | Arriba si $p > 0$ | Abajo si $p < 0$ | Derecha si $p > 0$ | Izquierda si $p < 0$ |
| Forma |  |  |  |  |

**Elípse**

| | Horizontal | Vertical |
|---|---|---|
| Ecuación | $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ | $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ |
| Centro | $(x_0, y_0)$ | $(x_0, y_0)$ |
| Semiejes | $a > b > 0$ | $b > a > 0$ |
| Excentricidad | $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ | $e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ |
| Focos | $(x_0 \pm a \cdot e, y_0)$ | $(x_0, y_0 \pm b \cdot e)$ |
| Directrices | $x = x_0 \pm \frac{a}{e}$ | $y = y_0 \pm \frac{b}{e}$ |
| Forma |  |  |

## Resumen

**Definición** (Módulo)**.** Sea $x \in \mathbb{R}$, llamaremos módulo de $x$ al real definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Proposición 1.** *Se tienen las siguientes propiedades:*
*(i)* $\forall x \in \mathbb{R} |x| \geq 0$
*(ii)* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
*(iii)* $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x| \cdot |y|$
*(iv)* $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
*(v)* $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$
*(vi)* $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$

**Definición** (Lugar geométrico)**.** Es el conjunto de puntos que satisfacen una condición dada

**Definición** (Raíz cuadrada)**.** Sea $x$ un real no negativo, definimos su raíz cuadrada como aquel número $t$, tal que $t^2 = x$ y lo denotamos como $\sqrt{x} = t$.

**Observación.** Por el momento asumiremos la existencia y unicidad de la raíz cuadrada para cada real no negativo, pues nos faltan herramientas para demostrar esto uwu

**Definición** (Distancia entre puntos)**.** Dados dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, entonces la distancia entre $P_1$ y $P_2$ estará dada por:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**Definición** (Circunferencia)**.** Definimos la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro $A = (x_0, y_0)$ y radio $r$ como el lugar geométrico de todos los puntos tales que su distancia a $A$ es exactamente $r$, es decir:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(A, (x, y)) = r\}$$

Usando la fórmula para distancia, obtenemos que:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$$

**Definición** (Ecuación general de la recta)**.**

$$\mathcal{L} : ax + by + c = 0$$

**Definición** (Pendiente de una recta)**.** Sea un recta $\mathcal{L}$ no vertical, con dos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ distintos en ella, definimos la pendiente de $\mathcal{L}$ como el real $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

**Definición** (Ecuación de la recta, punto pendiente)**.**

$$\mathcal{L} : (y - y_0) = m(x - x_0)$$

**Definición** (Ecuación de la recta dados dos puntos)**.**

$$\mathcal{L} : (y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

**Definición** (Ecuación principal de la recta)**.**

$$\mathcal{L} : y = mx + n$$

**Definición** (Simetral)**.** Dados dos puntos $P, Q$ distintos, definimos la simetral como la recta:

$$\mathcal{L} : d(P, (x, y)) = d(Q, (x, y))$$

**Definición** (Paralelismo)**.** Dos rectas $L$ y $L'$ son paralelas ssi $L = L'$ o bien $L \cap L' = \emptyset$

**Definición** (Perpendicularidad)**.** Dos rectas $L$ y $L'$ son perpendiculares ssi para todo par de puntos distintos $P, Q \in L$, la simetral entre $P$ y $Q$ es paralela a $L'$