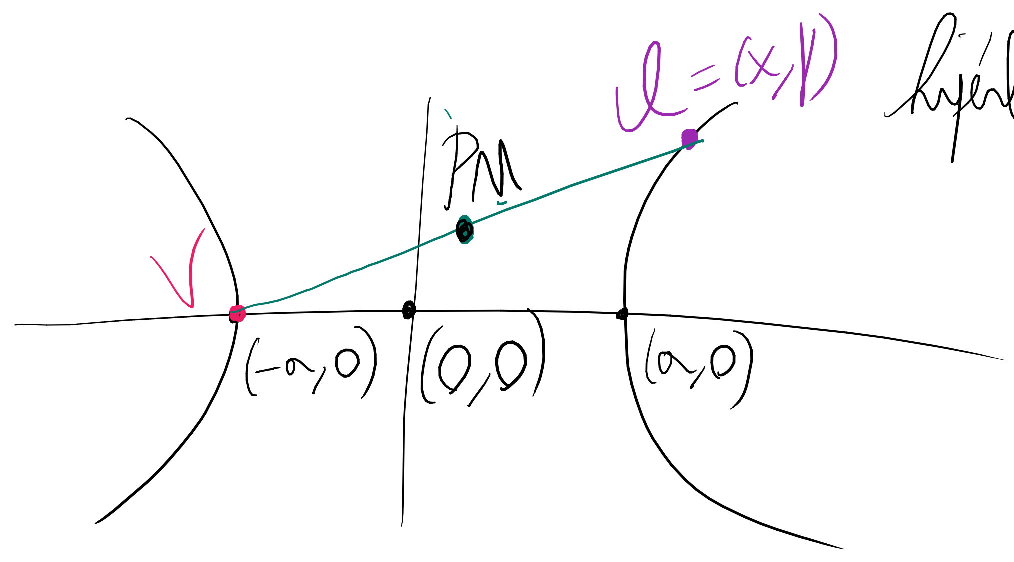
P2 | Hipérbola: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b>0$

hipérbola horizontal
centro: $(0,0)$



Obtener coordenadas:

$$PM=\Big(\overbrace{\frac{x+(-a)}{2}}^{\alpha},\ \overbrace{\frac{y+0}{2}}^{\beta}\Big)$$

$$\boxed{PM=\Big(\underbrace{\frac{x-a}{2}}_{\alpha},\ \underbrace{\frac{y}{2}}_{\beta}\Big)}$$

$(x,y)\in$ Hipérbola

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (\#)$$

$$\alpha=\frac{x-a}{2}\Leftrightarrow x=2\alpha+a$$
$$\Leftrightarrow x^2=(2\alpha+a)^2$$

$$\beta=\frac{y}{2}\Leftrightarrow y=2\beta$$
$$\Leftrightarrow y^2=4\beta^2$$

En $(\#)$: $$\frac{(2\alpha+a)^2}{a^2}-\frac{4\beta^2}{b^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(2\left(\alpha+\frac{a}{2}\right)\right)^2}{a^2}-\frac{4\beta^2}{b^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\alpha+\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{\beta^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1$$

Hipérbola (horizontal) centro: $\left(-\frac{a}{2},0\right)$

Excentricidad: $$e=\frac{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}}{\left(\frac{a}{2}\right)}$$

Focos: $\left(-\frac{a}{2}\pm\frac{a}{2}e,\ 0\right)$

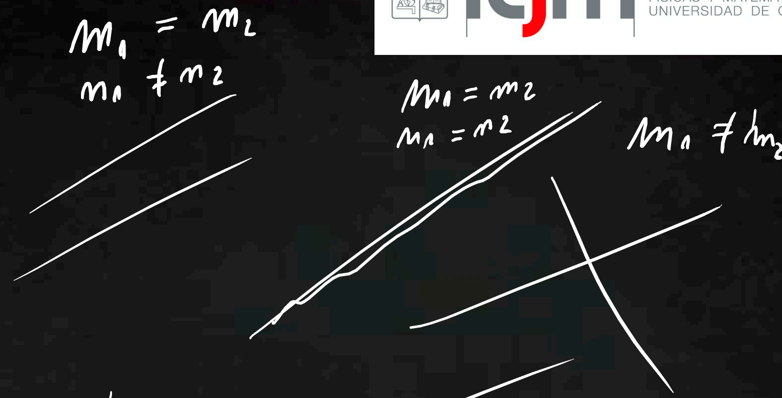
Directrices:

$$x=-\frac{a}{2}\pm\frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{e}$$

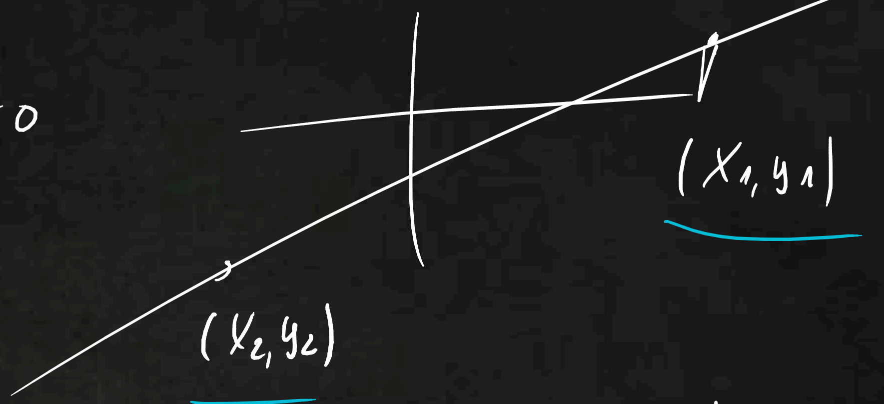
Recta y Circunferencia

- Ecuación general $= 0$
  - $ax + bx + c = 0$
  - Ecuación principal

$y = mx + n \leftarrow$

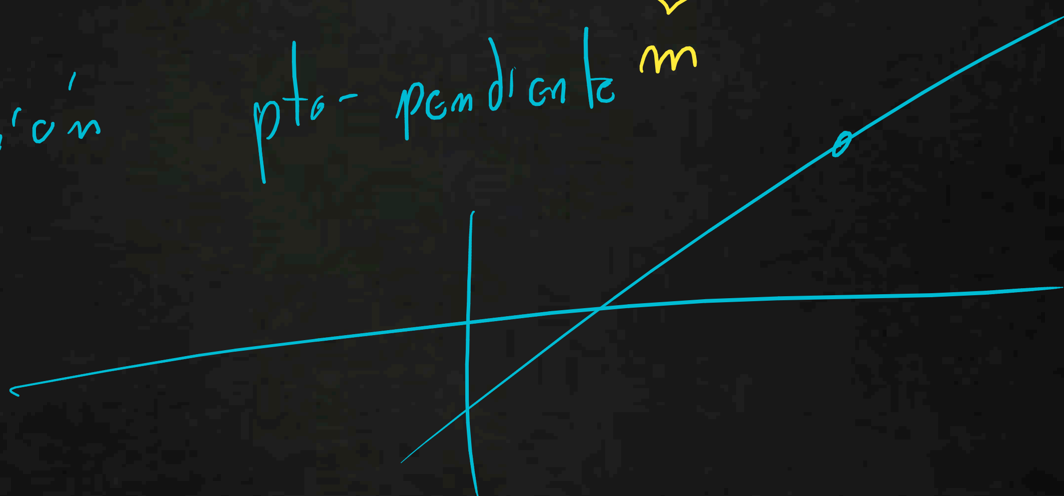


E pto - pto



Ecuación: $y - y_1 = \underbrace{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{m} (x - x_1)$

Ecuación pto- pendiente



$\underline{(x_1, y_1)}$, $\underline{m}$, $y - y_1 = m(x - x_1)$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Circunferencia: (Ec. general)

$$(x-h)^2+(y-k)^2-r^2=0$$

Centrada (h,k), r radio.

Completación de cuadrado

$$x^2+\frac{x}{2}+3+y^2-y+4+9=0$$

$$(z+w)^2=z^2+2zw+w^2 \quad \Big| \quad x=z, \quad 2\cancel{z}w=\frac{\cancel{x}}{2}, \quad w=\frac{1}{4}$$

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}$$

$$(\bar{z}+\bar{w})^2=\bar{z}^2+2\bar{z}\bar{w}+\bar{w}^2$$

$$\bar{z}=y, \quad 2\cancel{\bar{z}}\bar{w}=-\cancel{y}\Rightarrow \bar{w}=-\frac{1}{2}, \quad \bar{w}^2=\frac{1}{4}$$

$$\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)+3-\frac{1}{16}+\left(y^2-2y\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+9-\frac{1}{4}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+12\cdot\frac{16}{16}-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{4}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{187}}{4}\right)^2$$

Teorema: por 3 puntos pasa una única circunferencia

Teorema: por 3 puntos pasa una única parábola.

Ec. g. cuadrática

$$ax^2+bx+c=0$$

Teorema: por 3 puntos pasa una sola circunferencia

$$\underline{a}x^2+\underline{b}x+\underline{c}+\underline{d}y^2+\underline{e}y+\underline{f}=0$$

$$6-1-1-1=3$$

cte simetría x simetría y

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

1 2 3

Parabola $ax^2+bx+c=0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\Delta := b^2-4ac$

$\Delta > 0$ 2 cortes (soluciones)

$\Delta = 0$ 1 corte

$\Delta < 0$ 0 corte

$ax^2+bx+c=0$

$$\to x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = \frac{y}{a} \quad / \cdot\frac{1}{a}, \quad a \neq 0$$

$$(z+w)^2 = z^2+2zw+w^2$$

$x^2 = z^2, \ x = z$

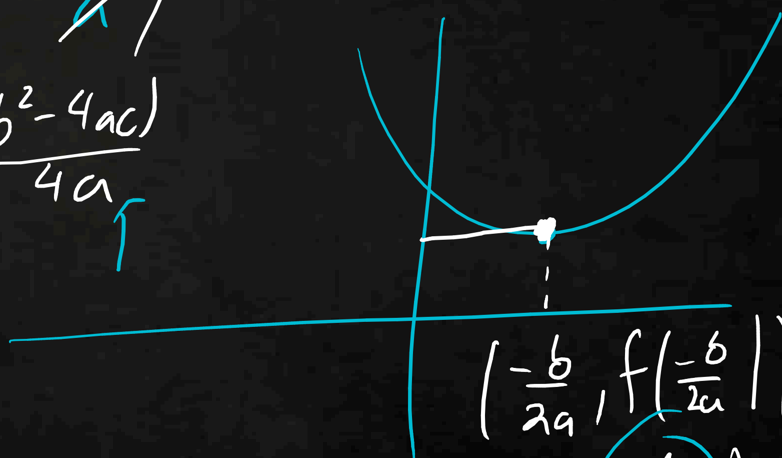
$2\cancel{z}w = \frac{b\cancel{x}}{a} \to w = \frac{b}{2a}$

$w^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

$$\iff \underbrace{x^2+2\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}} + \underbrace{\frac{4ac}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}} = \frac{y}{a}$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \frac{-b^2+4ac}{4a^{\cancel{2}}} = \frac{y}{\cancel{a}} \quad / \cdot a$$

$$a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2 = y - \frac{-(b^2-4ac)}{4a}$$



$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

$$\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Fórmula canónica la ecuación cuadrática

$$y-y_0 = \frac{1}{4p}(x-x_0)^2$$

$$\frac{1}{4p} = a \Rightarrow \frac{1}{4a} = p$$

Características de las cónicas.

Parábola Vertical / Vértice, foco, directriz.

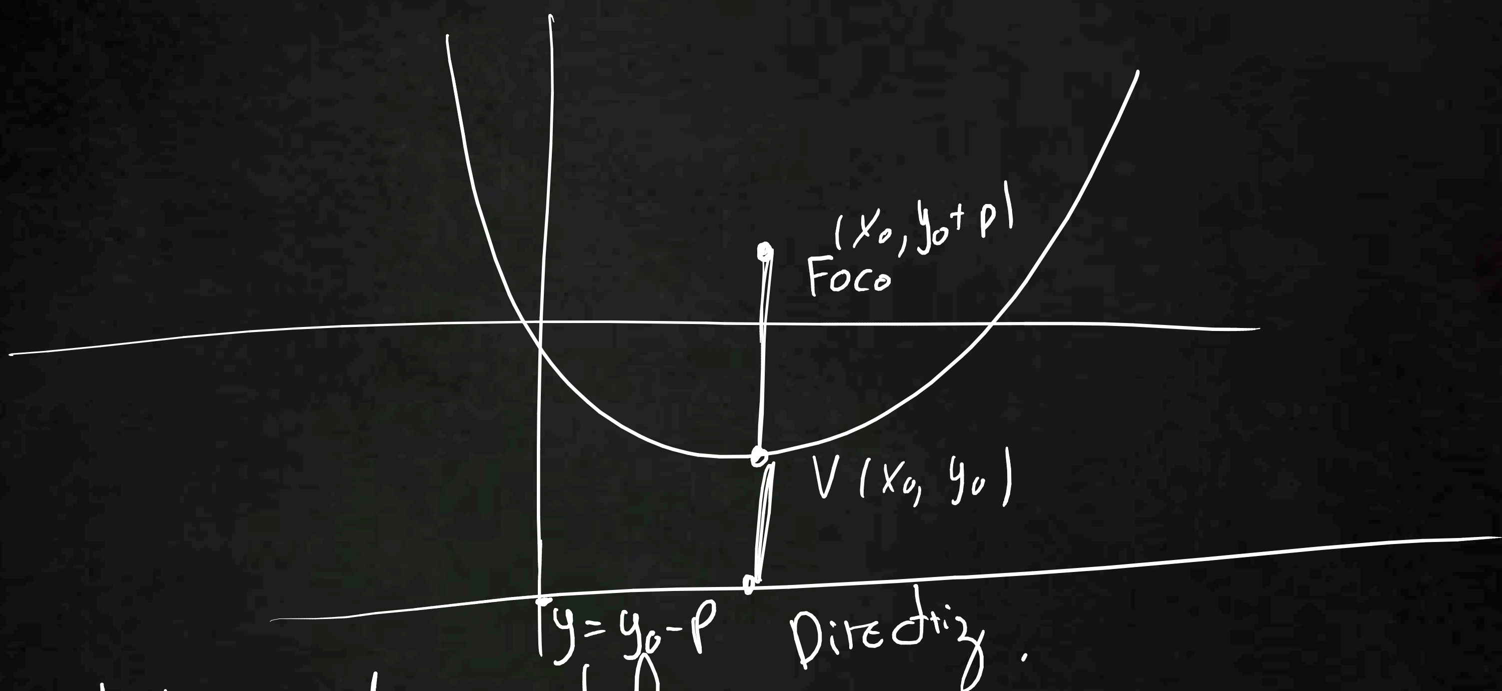
canónica — general

$$y - y_0 = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2 \to V = (x_0, y_0) = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

Foco, $F = (x_0, y_0 + p) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a} + \frac{1}{4a}\right)$

$p := \frac{1}{4a}$

Directriz, $y = y_0 - p = f\left(\frac{-b}{2a}\right) - \frac{1}{4a}$

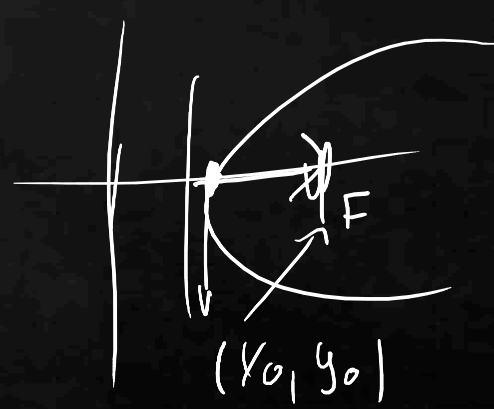


Parábola horizontal $ay^2 + by + c = 0$

Vértice (x_0, y_0)

Foco $(x_0 + p, y_0)$

Directriz $y = x_0 - p$

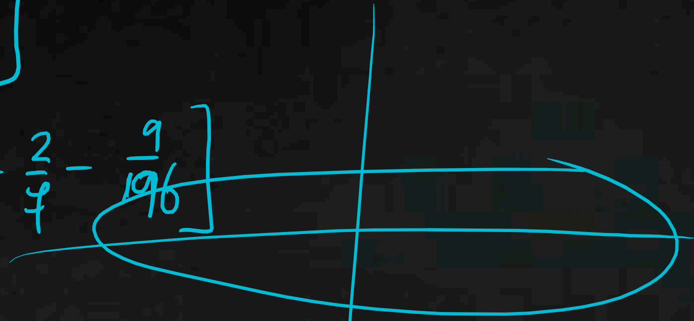


$7x^2+3x-2$

Recuerdo completación cuadrado con coeficiente $\neq 1.$

$$7\left[x^2+\frac{3}{7}x-\frac{2}{7}\right]$$

$$7\left[\underbrace{x^2+2\cdot\frac{3}{14}x+\frac{9}{196}}-\frac{2}{7}-\frac{9}{196}\right]$$



$$(z+w)^2=z^2+2zw+w^2$$

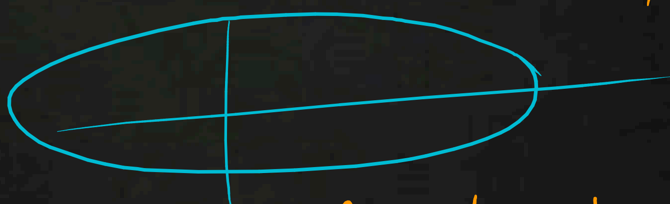
$$z^2=x^2\to x=z\quad,\quad 2\cancel{z}w=\frac{3}{7}\cancel{x}$$

$$w=\frac{3}{14}$$

$$-\frac{2}{7}\cdot\frac{14\cdot 2}{14^2}-\frac{9}{14\cdot 14}=\frac{-64}{14\cdot 14}$$

$$7\left[\left(x+\frac{3}{14}\right)^2-\frac{64}{14^2}\right]$$

$$7\left(x+\frac{3}{14}\right)^2-\frac{64}{14^2}\cdot 7+(y+1)^2=0$$



Siempre que los coeficientes de $1\cdot(x+h)^2$, $1\cdot(y+k)^2$ sean iguales, será una circunferencia, y si no, será una elipse (igual signo)

Considere los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (-a, 0)$, donde $a > 0$. Encuentre el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$ tal que las pendientes de las rectas L_{PA} y L_{PB} satisfacen la siguiente relación

$$m_{PA} = \frac{2m_{PB}}{1 - m_{PB}^2}$$

Notemos que $m_{PA} = \dfrac{y}{x-a}$ y $m_{PB} = \dfrac{y}{x+a}$, por lo tanto reemplazando:

$$\frac{y}{x-a} = \frac{2\dfrac{y}{x+a}}{1 - \dfrac{y^2}{(x+a)^2}} \iff 1 = \frac{2\dfrac{(x-a)}{x+a}}{1 - \dfrac{y^2}{(x+a)^2}} \iff \frac{(x+a)^2 - y^2}{(x+a)^2} = 2\frac{(x-a)}{x+a} \iff (x+a)^2 - y^2 =$$

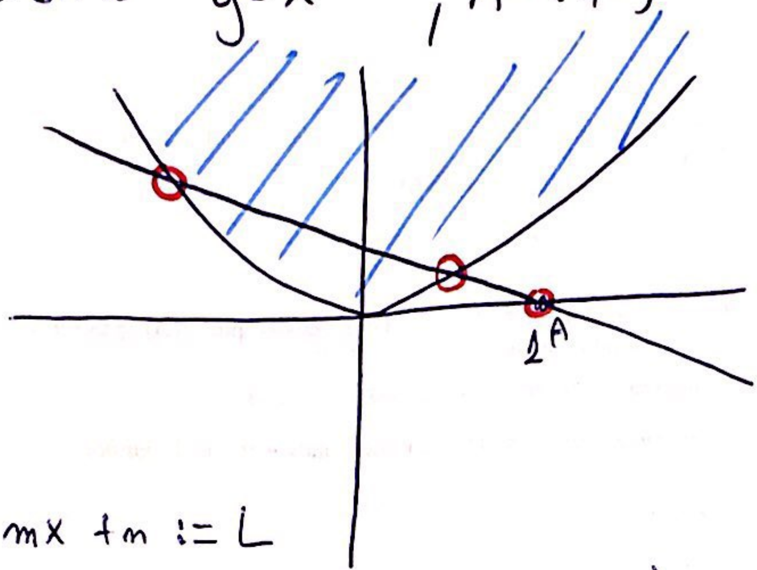
$$2(x^2 - a^2) \iff 4a^2 = x^2 - 2xa + a^2 + y^2 \iff (2a)^2 = (x-a)^2 + y^2$$

Es una circunferencia de centro $(a, 0)$ y radio $2a$.

P1

Auxiliar 4

Considere $y = x^2$, $A = (1,0)$



$y = mx + n := L$

a) Entonces lo que me pides es intersectar la recta con la parábola

- Sé que la recta pasa por A

$\Rightarrow (1,0) \in L. \Rightarrow y = mx + n \Rightarrow 0 = m + n$

$\Rightarrow \underline{m = -n}$

$\Rightarrow y = mx - m$

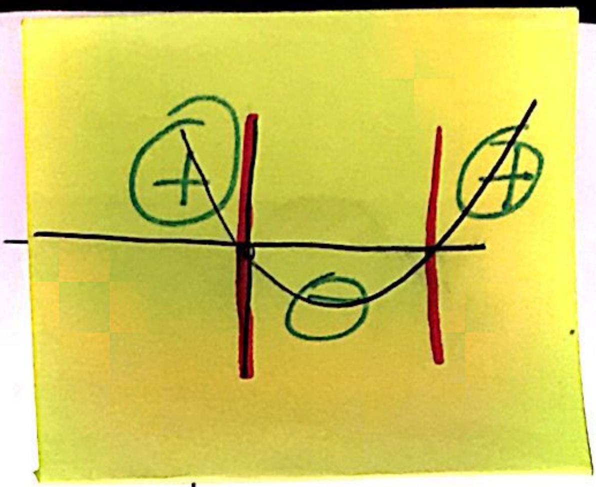
Intersectando $\Rightarrow mx - m = x^2$

$\underline{0 = x^2 - mx + m}$ | Intersección.

Como quiero 1 o más $\Rightarrow \Delta \geq 0$

Recordemos que si $\Delta \geq 0$ la cuadrática tiene 2 o 1 solución.

$0 = x^2 - mx + m$



$a = 1,\ b = -m,\ c = m$

$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot m$

$= m^2 - 4m \geq 0$

$m(m-4) \geq 0$

↳ Esto es una parábola

$\Rightarrow m^2 - 4m \leq 0$ si $m \in [0, 4]$

$m^2 - 4m \geq 0$ si $m \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty+)$

$C = (-\infty, 0] \cup [4, \infty+)$ // \ $m \in C$. !!!

b) $m \in \mathbb{R}$, Sea $P \wedge Q$ pontos de intersección.

$f(x) = x^2 - mx + m$. → su solución

$\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $a = 1$; $-m = b$; $m = c$

Calculo M con el punto medio de P y Q

$x_{1,2} = \dfrac{m \pm \sqrt{m^2 - 4m}}{2} \Rightarrow \dfrac{x_1 + x_2}{2} = x_M$

Como P y Q ∈ L puedo calcular M, solo sacando punto medio.

↳ su crecimiento es constante.

$\Rightarrow \dfrac{\dfrac{m + \cancel{\sqrt{m^2 - 4m}}}{2} + \dfrac{m - \cancel{\sqrt{m^2 - 4m}}}{2}}{2}$

$x_M = \dfrac{2m}{4} = \dfrac{m}{2} \Rightarrow$ reemplazo en ecuación de recta y saco y_M

$L: mx - m = y$

$y_M = m \cdot \dfrac{m}{2} - m = \dfrac{m^2 - 2m}{2}$

c) ¿Qué recorre M?

Según $X_M = \frac{m}{2} \Rightarrow 2X_M = m$

$y_M = m X_M - m = 2X_M \cdot X_M - 2X_M$

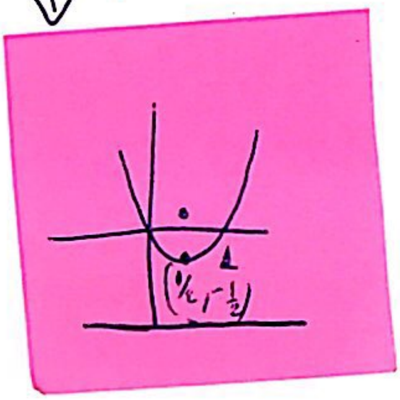
$\boxed{y_M = 2(X_M^2 - X_M)}$ → Parábola que describe (X_M, y_M) ///

$y = 2x^2 - 2x$

$a = 2,\ b = -1;\ c = 0$

$V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = V\left(\frac{2}{4}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

$= V\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ///



Recordamos $p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{8}$ # Ver resumen Parábolas.

Luego $x_F,\ y_F + p$

foco $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right)$

directriz. $y = y_F - p = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = -\frac{4}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{5}{8}$ //

Terminamos !

walquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl