MA1101-4 Introducción al Cálculo
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A y Javier Santidrián.

Auxiliar 5:Funciones en una Variable

26 Septiembre 2022

Resumen Clase

- Inyectividad: Sea $f : A \to B$. f es inyectiva cuando
$$(\forall x, y \in A)x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$
- Sobreyectividad: Sea $f : A \to B$. f es sobreyectiva cuando
$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)y = f(x)$$
- Biyectividad: Sea $f : A \to B$. f es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.
- Ceros: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Los ceros son el conjunto
$$Z(f) == \{x \in Dom(f)|f(x) = 0\}$$
- Crecimiento: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $B \subseteq A$. Diremos que en B
  - f es creciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B)x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
  - f es decreciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B)x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
  - f es estrictamente creciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B)x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  - f es estrictamente decreciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B)x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
  - Además, si $A = B$ diremos que f es monótona creciente o decreciente según corresponda
- Paridad: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - f es par $\Leftrightarrow (\forall x \in A)f(-x) = x$
  - f es impar $\Leftrightarrow (\forall x \in A)f(-x) = -x$
- Función Periódica: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f es periódica $\Leftrightarrow p > 0$ tal que $(\forall x \in A)(x + p) \in A$ y $(\forall x \in A)f(x + p) = f(x)$

P1. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{5}{x^2-4}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ r

c) $f(x) = |x^2| - 2$

d) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

P2. Determine la paridad, ceros y biyectividad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 6x^2 - x - 5$

b) $g(x) = f(x + 1)$

c) $h(x) = f(|x|)$

P3. Sea las siguientes funciones analice sus características y luego grafiquelas:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{|x|+2}$

P4. Considere la función f definida por $\dfrac{x}{x^2-1}$.Se pide

a) Encontrar dominio, ceros, signos, paridad y asíntotas de todo tipo.

b) Demostrar que $\forall x_1, x_2 \in Dom(f)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(1 + x_2 \cdot x_1) \cdot (x_1 - x_2)}{((x_1)^2 - 1)((x_2)^2 - 1)}$$

Use este resultado para estudiar el crecimiento de f, indicando en que intervalos esta función es creciente y en cuales decreciente.

c) Calcule $f((1,\infty))$ y pruebe que la función

$$\begin{aligned} \iota(x) : (1,\infty) &\to f((1,\infty)) \\ x &\to \iota(x) := f(x) \end{aligned}$$

es biyectiva y determine su inversa.

d) Bosqueje el gráfico de f1027

1. Propuestos:

P5. Estudie inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de las siguientes funciones:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x^2+3x-1}{2x^2-5x+4}$

P6. Para $a, b \in \mathbb{R}$ se defina la función $f_{a,b}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por la fórmula:

$$f_{a,b}(x) = ax + b, x \in \mathbb{R}$$

a) Demuestre que $f_{1,b} \circ f_{a,0} = f_{a,b}$

b) Si $a \neq 0$, demuestre que $f_{a,b}$ es biyectiva y determine $f_{a,b}^{-1}$

c) Si $a \neq 0$, determine $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $f_{a,b} \circ f_{p,q} = f_{b,a}$

P7. Sea $f(x) = \dfrac{|x|+1}{|x|-1}$

a) Determine dominio, ceros, paridad y periodicidad de f

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f

c) Bosqueje el gráfico de f y determine su recorrido

P8. Sea $f(x) = 6x^2 - x - 5$. Determine paridad, ceros, crecimiento, inyectividad, sobreyectividad y cuando corresponda, la inversa de las siguientes funciones:

a) $g(x) = f(f(x))$

b) $g(x) = f(x+1)$

c) $g(x) = f(|x|)$

d) $g(x) = |f(x-1)|$

e) $f(f(x+1) - f(|x|))$

P9. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ una función dada por:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

a) Determine el dominio de f.

b) Demuestre que f es par.

c) A partir de lo anterior, determine el máximo conjunto A donde f es función y el conjunto B de modo que f sea biyectiva

d) Determine la función inversa

e) Grafique.

P10. Considere la función

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

Pruebe que esta función satisface la identidad:

$$f(x+y) \cdot f(x-y) = f(2x) + f(2y)$$