MA1001-4 Introducción al Cálculo, Primavera 2022
Profesor: Leonardo Sánchez Cancino
Auxiliares: Javier Santidrián Salas y Patricio Yáñez Alarcón

Auxiliar Preparación C1

Lunes 17 de Octubre de 2022

P1. Trigonometría

a) Resuelva la ecuación:

1)
$$\sin(2x)\cot(x) - \sin^2(x) = \frac{1}{2}$$

2)
$$sen(2x) = cos(x/2)$$

y verificar si $\frac{3\pi}{5}$

3)
$$1 + cos(x) + cos(2x) + cos(3x) = 0$$

b) Demuestre la siguiente propiedad.

$$1)\ \frac{1}{2}\cdot sin(x)\cdot sec^2(\frac{x}{2}) + cos(x)\cdot tan(\frac{x}{2}) - sin(x) = 0$$
$$2)\ tan(4x) = \frac{4tan(x) - 4tan^3(x)}{1 - 6tan^2(x) + tan^4(x)}$$
$$3)\ sin(x) + sen(y) = 2\cdot sin(\frac{x+y}{2})\cdot cos(\frac{x-y}{2})$$

P2. Axioma del Supremo

Considere el conjunto:

$$A = \{\frac{1}{(4n+1)^{2022}} : n \in \mathbb{N}\}$$

Demuestre que $\inf(A) = 0$.

P3. Sucesiones

Demuestre usando la definición de convergencia de sucesiones que:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$$

P4. *[Más de funciones]*

Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)}$$

Encuentre dominio, ceros, paridad, signos, periodicidad e inyectividad.

P5. ***[Té Supremo HIERBA LIMÓN FRAMBUESA]***
Sean $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado y sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente. Demuestre que el conjutno $f(\mathbb{A}) = \{f(x)/x \in \mathbb{A}\}$ tiene ínfimo y supremo, y que:

$$f(\mathbf{sup}(\mathbb{A})) \leq \mathbf{inf}(f(\mathbb{A})) \leq \mathbf{sup}(f(\mathbb{A})) \leq f(\mathbf{inf}(\mathbb{A}))$$

2 Axioma del Supremo

2.1 Definiciones Básicas

a) Un conjunto A se dice *acotado superiormente* si existe un real $c \in \mathbb{R}$ que sea mayor o igual que *todos* los elementos del conjunto en cuestión. Vale decir, si verifica que

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad x \leq c.$$

A c se le denomina *cota superior* del conjunto A, y si además $c \in A$ se denomina *máximo* del conjunto. Notar que cualquier otro real mayor o igual a una cota superior de A, también es cota superior del conjunto.

b) Un conjunto A se dice *acotado inferiormente* si existe un real $d \in \mathbb{R}$ que sea menor o igual que *todos* los elementos del conjunto en cuestión. Vale decir, si verifica que

$$(\exists d \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad x \geq d.$$

A d se le denomina *cota inferior* del conjunto A, y si además $d \in A$ se denomina *mínimo* del conjunto. Notar que cualquier otro real menor o igual a una cota inferior de A, también es cota inferior del conjunto.

c) Un real $s \in \mathbb{R}$ se dice *supremo* de un conjunto A (y lo denotamos $s = \sup(A)$), si es cota superior de él y a la vez es la menor de las cotas superiores. Cuando el máximo de un conjunto existe, es necesariamente igual a su supremo.

d) Un real $s \in \mathbb{R}$ se dice *ínfimo* de un conjunto A (y lo denotamos $s = \text{ínf}(A)$), si es cota inferior de él y a la vez es la mayor de las cotas inferiores. Cuando el mínimo de un conjunto existe, es necesariamente igual a su ínfimo.

2.2 Axioma del Supremo

a) Todo conjunto no vacío y acotado superiormente, posee supremo.

b) Todo conjunto no vacío y acotado inferiormente, posee ínfimo.

2.3 Propiedad Arquimediana

El conjunto de los números reales se dice arquimediano, esto quiere decir, que para todo real $x > 0$, existe un natural $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que $n \cdot x > 1$ o análogamente, tal que $x > \frac{1}{n}$. En términos de cuantificadores, escribimos

$$(\forall x > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad nx > 1.$$

2.4 Propiedades e Ideas Generales

a) Sean A y B dos conjuntos no vacíos y acotados superiormente. Si definimos a partir de ellos los conjuntos

$$A + B = \{x + y \ : \ x \in A, \ y \in B\}, \quad A \cdot B = \{xy \ : \ x \in A, \ y \in B\},$$

tenemos entonces que

   i) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
   ii) $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$.

b) El axioma del supremo y la propiedad arquimediana pueden ser usados para demostrar una serie de propiedades interesantes de muchos conjuntos numéricos (que los naturales son infinitos, la densidad de los racionales en los reales, la existencia del conjunto de los irracionales, etc).

c) Ideas para demostraciones: en general, suele ser una buena idea para demostrar que un real es supremo o ínfimo de un conjunto en particular, razonar por contradicción.

   i) Si s es una cota superior de un conjunto no vacío A, y se desea demostrar que $s = \sup(A)$, suele ser una buena forma para verificar esto último mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, el real $s - \varepsilon$ *no puede ser* cota superior de A. En palabras simples, se está demostrando que no podemos restar nada a s para que siga siendo cota superior, y por ende s es la menor de ellas.
   ii) Si s es una cota inferior de un conjunto no vacío A, y se desea demostrar que $s = \inf(A)$, suele ser una buena forma para verificar esto último mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, el real $s + \varepsilon$ *no puede ser* cota inferior de A. En palabras simples, se está demostrando que no podemos sumar nada a s para que siga siendo cota inferior, y por ende s es la mayor de ellas.