MA1001-4 Introducción al Cálculo, Primavera 2022
Profesor: Leonardo Sánchez Cancino
Auxiliares: Javier Santidrián Salas y Patricio Yáñez Alarcón

Auxiliar Preparación C1

Lunes 17 de Octubre de 2022

P1. Trigonometría

a) Resuelva la ecuación:

1)
$$\sin(2x)\cot(x) - \sin^2(x) = \frac{1}{2}$$

2)
$$sen(2x) = cos(x/2)$$

y verificar si $\dfrac{3\pi}{5}$

3)
$$1 + cos(x) + cos(2x) + cos(3x) = 0$$

b) Demuestre la siguiente propiedad.

$$1)\ \frac{1}{2} \cdot sin(x) \cdot sec^2(\frac{x}{2}) + cos(x) \cdot tan(\frac{x}{2}) - sin(x) = 0$$

$$2)\ tan(4x) = \frac{4tan(x) - 4tan^3(x)}{1 - 6tan^2(x) + tan^4(x)}$$

$$3)\ sin(x) + sen(y) = 2 \cdot sin(\frac{x+y}{2}) \cdot cos(\frac{x-y}{2})$$

P2. Axioma del Supremo

Considere el conjunto:

$$A = \{\frac{1}{(4n+1)^{2022}} : n \in \mathbb{N}\}$$

Demuestre que $\inf(A) = 0$.

P3. Sucesiones

Demuestre usando la definición de convergencia de sucesiones que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

P4. *[Más de funciones]*

Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)}$$

Encuentre dominio, ceros, paridad, signos, periodicidad e inyectividad.

P5. ***[Té Supremo HIERBA LIMÓN FRAMBUESA]***
Sean $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado y sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente. Demuestre que el conjutno $f(\mathbb{A}) = \{f(x)/x \in \mathbb{A}\}$ tiene ínfimo y supremo, y que:

$$f(\mathbf{sup}(\mathbb{A})) \leq \mathbf{inf}(f(\mathbb{A})) \leq \mathbf{sup}(f(\mathbb{A})) \leq f(\mathbf{inf}(\mathbb{A}))$$

2 Axioma del Supremo

2.1 Definiciones Básicas

a) Un conjunto A se dice *acotado superiormente* si existe un real $c \in \mathbb{R}$ que sea mayor o igual que *todos* los elementos del conjunto en cuestión. Vale decir, si verifica que

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad x \leq c.$$

A c se le denomina *cota superior* del conjunto A, y si además $c \in A$ se denomina *máximo* del conjunto. Notar que cualquier otro real mayor o igual a una cota superior de A, también es cota superior del conjunto.

b) Un conjunto A se dice *acotado inferiormente* si existe un real $d \in \mathbb{R}$ que sea menor o igual que *todos* los elementos del conjunto en cuestión. Vale decir, si verifica que

$$(\exists d \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad x \geq d.$$

A d se le denomina *cota inferior* del conjunto A, y si además $d \in A$ se denomina *mínimo* del conjunto. Notar que cualquier otro real menor o igual a una cota inferior de A, también es cota inferior del conjunto.

c) Un real $s \in \mathbb{R}$ se dice *supremo* de un conjunto A (y lo denotamos $s = \sup(A)$), si es cota superior de él y a la vez es la menor de las cotas superiores. Cuando el máximo de un conjunto existe, es necesariamente igual a su supremo.

d) Un real $s \in \mathbb{R}$ se dice *ínfimo* de un conjunto A (y lo denotamos $s = \text{ínf}(A)$), si es cota inferior de él y a la vez es la mayor de las cotas inferiores. Cuando el mínimo de un conjunto existe, es necesariamente igual a su ínfimo.

2.2 Axioma del Supremo

a) Todo conjunto no vacío y acotado superiormente, posee supremo.

b) Todo conjunto no vacío y acotado inferiormente, posee ínfimo.

2.3 Propiedad Arquimediana

El conjunto de los números reales se dice arquimediano, esto quiere decir, que para todo real $x > 0$, existe un natural $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que $n \cdot x > 1$ o análogamente, tal que $x > \frac{1}{n}$. En términos de cuantificadores, escribimos

$$(\forall x > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad nx > 1.$$

2.4 Propiedades e Ideas Generales

a) Sean A y B dos conjuntos no vacíos y acotados superiormente. Si definimos a partir de ellos los conjuntos

$$A + B = \{x + y \ : \ x \in A, \ y \in B\}, \quad A \cdot B = \{xy \ : \ x \in A, \ y \in B\},$$

tenemos entonces que

   i) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
   ii) $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$.

b) El axioma del supremo y la propiedad arquimediana pueden ser usados para demostrar una serie de propiedades interesantes de muchos conjuntos numéricos (que los naturales son infinitos, la densidad de los racionales en los reales, la existencia del conjunto de los irracionales, etc).

c) Ideas para demostraciones: en general, suele ser una buena idea para demostrar que un real es supremo o ínfimo de un conjunto en particular, razonar por contradicción.

   i) Si s es una cota superior de un conjunto no vacío A, y se desea demostrar que $s = \sup(A)$, suele ser una buena forma para verificar esto último mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, el real $s - \varepsilon$ *no puede ser* cota superior de A. En palabras simples, se está demostrando que no podemos restar nada a s para que siga siendo cota superior, y por ende s es la menor de ellas.
   ii) Si s es una cota inferior de un conjunto no vacío A, y se desea demostrar que $s = \inf(A)$, suele ser una buena forma para verificar esto último mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, el real $s + \varepsilon$ *no puede ser* cota inferior de A. En palabras simples, se está demostrando que no podemos sumar nada a s para que siga siendo cota inferior, y por ende s es la mayor de ellas.

Intro al Cálculo
Pauta Aux C2

Javier Santidrián Salas

P1 Trigonometría

Resuelva la siguiente ecuación:

$$\sin(2x)\cot(x) - \sin^2(x) = \frac{1}{2} \quad (\#)$$

SOL: Debemos encontrar los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen $(\#)$.

En efecto:

$$\sin(2x)\cot(x) - \sin^2(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cancel{\sin(x)}\cos(x)\frac{\cos(x)}{\cancel{\sin(x)}} - \sin^2(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2(x) - \sin^2(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2(x) - (1-\cos^2(x)) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{3}^{1}\cos^2(x) = \frac{\cancel{3}^{1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{2}$$

$$\underset{\sqrt{(\cdot)}}{\Leftrightarrow} \underbrace{|\cos(x)|}_{\sqrt{\cos^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \lor \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2k\pi \pm \pi/4$$

$$\lor$$

$$x = 2k\pi \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2k\pi \pm 3\pi/4$$

$$\Leftrightarrow x \in \{2k\pi \pm \pi/4 : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\pi \pm 3\pi/4 : k \in \mathbb{Z}\}$$

P2) Axioma del Supremo

$$A = \left\{ \frac{1}{(4n+1)^{2022}} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

PDQ $\inf(A) = 0$.

SOL: Primero $A \neq \emptyset$ $\left(\text{Ej: } \frac{1}{(4\cdot 0+1)^{2022}} = 1 \in A \right)$
y además $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\underbrace{\frac{1}{(4n+1)^{2022}}}_{\in \mathbb{N}} \geq 0$$

luego 0 es cota inferior de A.
Así, por propiedad se tiene que $\exists \inf(A)$
($A \neq \emptyset$ y acotado inferiormente).
Para ver que $\inf(A) = 0$ falta ver que
0 es la mayor de las cotas inferiores
(ya sabemos que es cota inferior), ie que
$\forall \varepsilon > 0$, $0 + \varepsilon = \varepsilon$ no es cota inferior,
o equivalentemente que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(4n+1)^{2022}} < \varepsilon$$

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario.
Por propiedad arquimediana $\exists n \in \mathbb{N}$ tq
$\varepsilon \cdot n > 1$, ie $\varepsilon > \frac{1}{n}$.

Pero:

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{4n} > \frac{1}{4n+1} > \frac{1}{(4n+1)^{2022}}$$

Luego

$$\varepsilon > \frac{1}{(4n+1)^{2022}}$$

y se tiene lo pedido.

$\therefore \inf(A) = 0$ ////

P3 | Sucesiones

PDQ $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$

$\left(\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : \left|\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon \right)$

SOL: Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por propiedad arquimediana $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\varepsilon \cdot n_0 > 1$, ie $\varepsilon > \frac{1}{n_0}$.

Ahora sea $n \geq n_0$ arbitrario. Luego:

$$\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right|$$

$$= \left| \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)} \right|$$

$$= \frac{\cancel{1} + \frac{1}{n} \cancel{- 1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}$$

$$\leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{n} \underset{n \geq n_0}{\leq} \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

lo que prueba lo pedido ▱

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
01 de Mayo del 2009

Pauta Guía Problemas: Semana 7

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 2x = \cos \frac{x}{2}.$$

Graficar las soluciones en el círculo geométrico y determinar si $\frac{3\pi}{5}$ es solución.

Solución

Primero recordemos que $\operatorname{sen} \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2x = \cos \frac{x}{2} &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos \frac{x}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \cos \frac{x}{2} = 0. \end{aligned}$$

Ahora, veamos que $\cos x - \cos y$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \cos x - \cos y &= \cos\left(\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right)\right) - \cos\left(\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right)\right) \\ &= -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{aligned}$$

Donde la última expresión, se obtiene después de aplicar las fórmulas ya conocidas para calcular el coseno de sumas y restas de ángulos, según corresponda.
Con esto, volvemos al problema, y reescribimos:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \cos \frac{x}{2} = 0 &\Leftrightarrow -2 \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{x}{2}}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{x}{2}}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi - 3x}{4}\right)}_{(1)} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi - 5x}{4}\right)}_{(2)} = 0. \end{aligned}$$

Lo que vale si y sólo si $(1) = 0 \vee (2) = 0$. Resolviendo las ecuaciones por separado tenemos

$$\begin{aligned} (1) = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi - 3x}{4}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi - 3x}{4} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{3x}{4} = \frac{\pi}{4} - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi(1-4k)}{3}. \end{aligned}$$

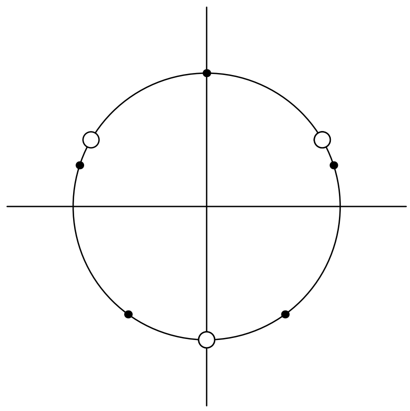
y para (2)

$$\begin{aligned} (2) = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi - 5x}{4}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi - 5x}{4} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{4} - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi(1-4k)}{5}. \end{aligned}$$

Para ver si $\frac{3\pi}{5}$ es solución, debemos encontrar, en las soluciones de (2), un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{\pi(1-4k)}{5} \equiv_{4\pi} \frac{3\pi}{5}$. Esto equivale a encontrar $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{\pi(1-4k)}{5} = \frac{3\pi}{5} + 4\ell\pi$. Esto pues la función $\operatorname{sen} 2x - \cos \frac{x}{2}$ es 4π-periódica. Resolvamos

$$\begin{aligned}\frac{3\pi}{5} - \frac{\pi(1-4k)}{5} = \frac{3\pi}{5} + 4\ell\pi &\Leftrightarrow 3 - 1 + 4k = 20\ell \\ &\Leftrightarrow 2 + 4k = 20\ell \\ &\Leftrightarrow 1 + 2k = 10\ell\end{aligned}$$

Lo que es imposible. Concluimos que $\frac{3\pi}{5}$ no es solución.
Para graficar las soluciones, notemos que como la función es 4π-periódica, entonces en el circulo unitario veremos aparentemente soluciones que no lo son, por ejemplo $\frac{3\pi}{5}$, pues $\frac{3\pi}{5} \equiv_{2\pi} \frac{-7\pi}{5}$ y sabemos que $\frac{-7\pi}{5}$ es solución. Entonces lo que haremos será hacer el cambio $x = 2\alpha$ (para obtener una función 2π-periódica y graficaremos para α.



P2. **(a)** Demostrar que $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

Solución

Primero notemos que, sumando un cero adecuado, tenemos

$$\alpha = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \quad \beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Entonces

$$\cos\alpha + \cos\beta = \cos\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] + \cos\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$$

Recordemos ahora que $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta &= \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \\ &+ \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \\ &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\end{aligned}$$

(b) Utilizar lo anterior para resolver la ecuación $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

Solución

Notemos que $\cos 0 = 1$, entonces reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}
\cos 2x + 1 + \overbrace{\cos 3x + \cos x}^{(a)} = 0 &\Leftrightarrow \overbrace{\cos x + \cos 0}^{(a)} + 2\cos 2x \cos x = 0\\
&\Leftrightarrow \cancel{2}\cos^2 x + \cancel{2}\cos 2x \cos x = 0\\
&\Leftrightarrow \cos x (\overbrace{\cos 2x + \cos x}^{(a)}) = 0\\
&\Leftrightarrow \cancel{2}\underbrace{\cos x}_{(1)} \underbrace{\cos \frac{3x}{2}}_{(2)} \underbrace{\cos \frac{x}{2}}_{(3)} = 0.
\end{aligned}$$

Ahora tenemos 3 ecuaciones para x: $(1) = 0, (2) = 0, (3) = 0$. Resolviendo por separado:

- (1)=0:
$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi.$$
- (2)=0:
$$\begin{aligned}
\cos \frac{3x}{2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 2k\pi\\
&\Leftrightarrow x = \frac{4k\pi}{3}.
\end{aligned}$$
- (3)=0:
$$\begin{aligned}
\cos \frac{x}{2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi\\
&\Leftrightarrow x = 4k\pi.
\end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

P3. Resolver la ecuación
$$\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x = 1.$$

Solución

Un camino posible para solucionar el problema, es aplicar un método visto en cátedra, haciendo el cambio de variables $a = \cos x$, $b = \operatorname{sen} x$, y resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
a\sqrt{3} + b &= 1\\
a^2 + b^2 &= 1
\end{aligned}$$

Donde la última expresión, nace del hecho de que $(\cos x, \operatorname{sen} x)$ es un punto perteneciente a la circunferencia unitaria. A continuación, mostraremos otra solución, un poco más "'elegante"', notando que si multiplicamos la igualdad por $\frac{1}{2}$ obtenemos que
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

Recordemos que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Entonces
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

Y aplicando la fórmula $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi + (-1)^k \overbrace{\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\\
&\Leftrightarrow x = \left(k - \frac{1}{3}\right)\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

P.

PDQ.

$$\frac{1}{2}\sin(x)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos(x)\,tg\left(\frac{x}{2}\right)-\sin(x)=0$$

$$\frac{1}{2}\sin(x)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\cos(x)\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}-\sin(x)=\cancel{0}$$

$x=2\alpha.$

$$\frac{1}{2}\sin(2\alpha)\frac{1}{\cos^2(\alpha)}+\cos(2\alpha)\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}-\sin(2\alpha)$$

$$=\sin\alpha\frac{\cancel{\cos\alpha}}{\cos^{\cancel{2}}(\alpha)}+\left(\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)\right)\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}-\sin(2\alpha)$$

$$=tg\,\alpha\left(1+\cos^2\alpha-\sin^2(\alpha)\right)-\sin(2\alpha)$$

$$=tg\,\alpha\left(\cancel{\sin^2\alpha}+\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha)-\cancel{\sin^2(\alpha)}\right)-\sin(2\alpha)$$

$$=2\sin\alpha\cos\alpha-\sin2\alpha$$

$$=\sin(2\alpha)-\sin(2\alpha)$$

Scanned with CamScanner

Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def

$f(x) = (1 + \operatorname{sen}(x))/(1 - \cos x)$ 1) Dom, ceros, signos, periodicidad, inyectividad

$-\frac{\pi}{2}$ $\pi + \frac{\pi}{2}$ Dom $1 - \cos(x) \neq 0$

2π $1 \neq \cos(x)$

$x = 2k\pi \pm 0 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

1) $\Rightarrow \operatorname{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{x / x = 2k\pi, k \in \mathbb{N}\}$

2) Ceros $Z(f)$: $1 + \operatorname{sen}(x) = 0$

$\operatorname{sen}(x) = -1$

$\Rightarrow x = k\pi + (-1)^k \frac{3}{2}\pi$; $\pi + -\frac{3\pi}{2}$ $< -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow Z(f) = \{x / x = k\pi + (-1)^k \frac{3}{2}\pi, k \in \mathbb{N}\}$

3) signos $\to$ $f(x) = \frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)}$ | $-1 \le \operatorname{sen}(x) \le 1$ | $\cos(x) \le 1 \wedge -1 \le \cos(x)$

$0 \le \operatorname{sen}(x) + 1 \le 2$ | $-1 \le -\cos(x) \wedge -\cos(x) \le 1$

$\Rightarrow -1 \le -\cos(x) \le 1$

$0 \le 1 - \cos(x) \le 2$

$1 + \operatorname{sin}(x) \geq 0$ $\forall x \in \operatorname{Dom}$

$1 - \cos(x) > 0$ $\forall x \in \operatorname{Dom}$

$\Rightarrow f(x) \geq 0$ $\forall x \in \operatorname{Dom}(f(x))$

4) Paridad Dado $x = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow f(x) = 0$ / $\nexists x \in \operatorname{Dom} f(x) < 0$

$x = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(x) \neq 0$

$$\frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)} \neq \frac{1 + -\operatorname{sin}(x)}{1 - \cos(x)} \neq \frac{-1 + \operatorname{sin}(x)}{1 - \cos(x)}$$

Periodo

Debe ser al menos 2π periódica, cociente 2π periódica.

Periodo $f(x+p) = f(x)$, $\forall$ menor $p \in \mathbb{R}$

Por contradicción

si $p \in (0, 2\pi)$

$f(x) = f(x+p)$, $x = \frac{3\pi}{2}$

$$0 = \frac{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + p\right)}{1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + p\right)} \Rightarrow -1 = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + p\right)$$

$$\frac{3\pi}{2} + p = k\pi + (-1)^k \frac{3\pi}{2}$$

$\forall k$, si $k=0$ $\quad p = k\pi + (-1)^k \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}$

$p = 0$

Inyectividad $\forall x, y$ $\quad \frac{1+\sin(x)}{1-\cos x} = \frac{1+\sin y}{1-\cos y} \Rightarrow x = y$

pero $x = \frac{3}{2}\pi \wedge x = \frac{7\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = 0$

$f(A)=\{f(x)/x\in A\}$

P4 | $A\subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado (superior e inferiormente)

tenemos $\exists\ sup(A), \exists\ inf(A)$ por axioma supremo

Veamos que el conjunto imagen de $f(A)$ posee ínfimo y sup.

• Debemos probar que es **NO VACÍO** y **ACOTADO**

1) Como $A\neq\phi$ y f está definida en todo $\mathbb{R}$, si $a\in A$, $\exists\ f(a)$ $\therefore$ $f(A)\neq\phi$

$\boxed{f(A)=\{y\in\mathbb{R}/\exists x\in A, f(x)=y\}}$ || Imagen

2) $\exists\ sup(A)$ e ínfimo de A $\neq 0$ $\wedge$ acotado

$\Rightarrow \forall x\in A \quad inf(A)\leq x\leq sup(A)$

Si son números reales puedo usar f

Si f es decreciente si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_2)\leq f(x_1)$

$f(x_2)-f(x_1)\leq 0$

$inf(A)\leq x \quad\wedge\quad x\leq sup(A)$

$f(x)\leq f(inf(A)) \quad\wedge\quad f(sup(A))\leq f(x)$

$\Leftrightarrow \boxed{f(sup(A))\leq f(x)\leq f(inf(A))} \Rightarrow f(A)$ está acotado

$\Rightarrow \exists\ sup(f(A)), \exists\ inf(f(A))$

• Además se tiene el conjunto $f(A)$ cumple

$\forall y\in f(A) \quad inf(f(A))\leq y\leq sup(f(A)) \Rightarrow inf(f(A))\leq sup(f(A))$ (1)

tenemos que

$\forall x \in A \quad f(\sup(A)) \leq f(x) \leq f(\inf(A))$

$\forall y \in f(A)) \quad f(\sup(A) \leq y \leq f(\inf)(A))$

$\downarrow$ cota infe $\qquad \downarrow$ cota superior

y como $\sup(f(A)$ es la menor de las cotas superiores $\Rightarrow \sup(f(A)) \leq f(\inf(A))$ ②

y como $\inf(f(A)$ es la mayor de cotas inferiores

$$f(\sup(A)) \leq \inf(f(A)) \quad ③$$

① , ② $\wedge$ ③

$f(\sup(A)) \leq \inf(f(A)) \leq \sup(f(A)) \leq f(\inf(A))$ $\boxed{///}$

Vale lentamente.

Terminamos !

walquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl