

MA1101-4 Introducción al Cálculo

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Patricio Yáñez A.y Javier Santidrián

Consultas: pyanez@dim.uchile.cl



Auxiliar 8: Sucesos entre sus sesiones de sucesiones

P1. [Definición Convergencia] Demuestre utilizando definición de convergencia.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n} + 1} = 1$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3}{3n - 1} = \frac{2}{3}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + 1$ diverge

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \max\left\{\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$ calcule su límite y demuéstrello.

P2. [Calcular Límites] Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+n}\right)^2$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{n^2 \cdot 3^{n+1}}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{2n+4}\right)^n$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 1}{n^2 \cdot 3^{n+1}}}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}, a \neq b$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}, a, b > 0$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3 + 100n^2 + 3}$

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$

P3. [Trabajemos con un poco más de teoría]

Sea (a_n) una sucesión tal que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n$. Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Indicación: Probar que si $x_n \rightarrow l$ y se tiene $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(n) \geq n$, entonces $x_{f(n)} \rightarrow l$

P4. [Sándwich]

Usando que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ para todo $a > 0$ y el Teorema del Sándwich, calcule:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7^n + 5^n + 3^n}$$

P5. [Sucesión y función]

Sea (x_n) una sucesión convergente a $l \in \mathbb{R}$, y sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente.

a) Pruebe que la sucesión $(x_{f(n)})$ es convergente a l .

b) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1}\right)^{n^2}$

P6. [Recurrencia]

Considere la sucesión definida mediante la recurrencia:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} \cdot (1 + a_{n-1}^2), \text{ con } a_0, a_1 \in (0, 1)$$

- a) Demuestre que $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2), a_n \in (0, 1)$.
- b) Muestre que a_n es convergente.
- c) Calcule el límite.

P7. [Sucesión creciente]

Sea (u_n) una sucesión creciente y (v_n) una sucesión decreciente, tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$. Pruebe que (u_n) y (v_n) convergen y tienen el mismo límite.

P8. [Función/PROPUESTO]

Una función real f se dice continua en $x_0 \in \text{Dom}(f)$ si toda sucesión (x_n) tal que $x_n \rightarrow x_0$ y que $x_n \in \text{Dom}(f), \forall n \in \mathbb{N}$ entonces la sucesión $(f(x_n))$ tiene límite y $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$, y diremos que es continua (a secas) si f es continua en todo su dominio.

- a) Pruebe que la función $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ es continua.
 - 1) Pruebe que es continua en $x_0 = 0$
 - 2) Pruebe que si $x_0 > 0$ y $x_n \rightarrow x_0$, entonces existe $M > 0$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall n \geq n_0), \sqrt{x_n} > M$
 - 3) Usando lo anterior pruebe que $\sqrt{x_n} - \sqrt{x_0} \rightarrow 0$
- b) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$

P9. [Propuesto] \Rightarrow [BRÍGIDO]

Una sucesión finita de números reales es tal que la suma de 7 términos consecutivos cualesquiera es negativa, y la suma de 11 términos consecutivos cualesquiera es positiva.

¿Cuál es el mayor número de términos que puede tener tal sucesión?

Notitas:

1. P1) Esta pregunta busca que comprendan la definición de convergencia, para esto es recomendable tener la definición y desglosar cada conectivo lógico o cuantificador y ver que hace para el conjunto dado, estudien los casos $\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$
2. P2) Esta pregunta busca que a través de maniobras convenientes y de equivalencias lleguen a expresiones que sean más fáciles de trabajar.
 Unos ejemplos clásicos de esto es multiplicar por un 1 conveniente, bajo el argumento de $a_n = a_n \cdot 1$, usualmente se usa esto cuando tengo expresiones racionales con algún grado de polinomio en numerador y denominador, distintos o iguales.
 También cuando hay expresiones que son diferencias de expresiones poco trabajables como $\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot 1 = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$
Observación: Esto también se puede hacer para cualquier diferencia de polinomios de igual grado, propuesto!!