CÁLCULO:

- Axiomas... de cuerpo

1) Conmutatividad
2) Asociatividad
3) Distributividad
4) Existencia de neutros
5) Existencia de simétricos

... de orden en $\mathbb{R}$

6) $\mathbb{R}^*_+$

$x \in \mathbb{R}^*_+ \veebar (-x) \in \mathbb{R}^*_+ \veebar x=0$

7) Clausura de los reales

- Geometría

→ Distancia entre dos puntos = $\boxed{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}$

→ Ec. de la circunferencia:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$$

R = radio

Centro: (a,b)

LA RECTA:

Ec. general = $\boxed{ax+by+c=0}$ → $\boxed{y=mx-\frac{c}{b}}$

Ec. punto-pendiente = $\boxed{(y-y_0)=m(x-x_0)}$

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ con $A(x_1,y_1) \wedge B(x_2,y_2)$

CÓNICAS:

→ Parábola vertical

- Ecuación $\boxed{\frac{1}{4p}\cdot(x-x_v)^2=(y-y_v)}$
- Vértice = (x_v,y_v)
- Foco: (x_v, y_v+p)
- Directriz = $y=y_v-p$

→ Parábola horizontal

- Ecuación $\boxed{\frac{1}{4p}\cdot(y-y_v)^2=(x-x_v)}$
- Vértice = (x_v,y_v)
- Foco = (x_v+p, y_v)
- Directriz = $x=x_v-p$

ELIPSE HORIZONTAL

- Ecuación: $\boxed{\dfrac{(x-x_c)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1}$; $a>b$

- Directrices = $x_{1,2} = x_c \pm \dfrac{a}{e}$

- Excentricidad = $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

- Focos = $(x_c \pm ae, y_c)$

HIPÉRBOLA HORIZONTAL

- Ecuación = $\boxed{\dfrac{(x-x_c)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1}$

- Excentricidad = $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

- Focos y directrices se calculan del mismo modo que en la elipse.

-Funciones

→ Función par = $f(-x) = f(x)$

→ Función impar = $f(-x) = -f(x)$

-Trigonometría

$\boxed{S\frac{O}{H} \quad C\frac{A}{H} \quad T\frac{O}{A}}$

→ Seno = $T = 2\pi$, impar → Coseno = $T = 2\pi$, par

→ Tangente = impar , $\boxed{\tan = \frac{\text{sen}}{\cos}}$

estrictamente creciente en $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

→ Tabla de signos

cuadrantes	sen (x)	cos (x)	tan (x)
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	−	+
IV	−	+	−

Funciones inversas

→ Arcoseno = inversa de seno

$$x = k\pi + (-1)^k \alpha$$

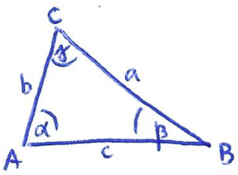
→ Arcocoseno = inversa de coseno

$$x = 2k\pi \pm \alpha$$

→ Arcotangente = inversa de tangente

$$x = k\pi + \alpha$$

Teorema del Seno



$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}}$$

Teorema del Coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Propiedades fundamentales

la vida (importante)

1) $\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

2) $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$

3) $\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cot(\alpha) = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \\ \sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)} \\ \csc(\alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} \end{array}}$$

Sumas & restas

→ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$

→ $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$

→ $\operatorname{sen}(\alpha) \pm \operatorname{sen}(\beta) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$

→ $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

→ $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

- El Supremo

AXIOMA 8: DEL SUPREMO

Todo conjunto $\mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente **tiene** supremo.

$[x] = \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$

Propiedades del Supremo

a) $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$

b) $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$

con $A, B \in [0, \infty)$

Supremo = menor de las cotas superiores

Ínfimo = mayor de las cotas inferiores

Máximo = cota superior que pertenece al conjunto

Mínimo = cota inferior que pertenece al conjunto

Densidad de los reales =

Entre dos nr. reales x, y con $x < y$, existe un racional r, tal que $x < r < y$.

- Sucesiones

Es una función $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \to f(n)$

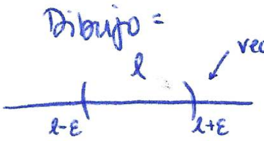
→ Convergencia = si $S_n \to \ell$ (tiende a un límite, o sea, converge)

Definición formal = $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \mid |S_n - \ell| \leq \varepsilon$

valor absoluto

tal que

Dibujo =



Sucesión nula = $S_n \to 0$

Sucesión acotada = tiene cota por uno de los dos lados

Álgebra de límites

Para u_n y v_n convergentes a u y v respectivamente =

1) $\lim (u_n + v_n) = u + v$
2) $\lim (u_n - v_n) = u - v$
3) $\lim (u_n v_n) = uv$
4) $\lim (\lambda u_n) = \lambda u$; $\lambda \in \mathbb{R}$

Álgebra de sucesiones = teorema

Sean $(u_n) \wedge (v_n)$ sucesiones convergentes.

1) (u_n) es nula si $(|u_n|)$ es nula.
2) (u_n) es nula $\Rightarrow$ (u_n) es acotada.
3) (u_n) es nula $\wedge$ $|v_n| \leq u_n \Rightarrow (v_n)$ es nula también.
4) $(u_n) \wedge (v_n)$ nulas $\Rightarrow (u_n+v_n) \wedge (u_n v_n)$ nulas también.
5) $(u_n) \wedge (v_n)$ acotadas $\Rightarrow (u_n+v_n) \wedge (u_n v_n)$ acotadas también.

IMPORTANTE

6) (u_n) nula y (v_n) acotada $\Rightarrow (u_n v_n)$ es nula. (nula · acotada = nula)

Propiedad Arquimediana

Para todo real x, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\boxed{xn > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{n}}$$

Es una verdad absoluta, si llegas a ella en una demostración, ganaste.

Teorema del Sandwich

Si existe el límite de x, y, z

y $\lim x = \lim z = \Omega \quad \wedge \quad x < y < z$

entonces $\lim x = \lim y = \lim z$

Se puede anotar así:

$$\underbrace{\lim x}_{\Omega} \leq \underbrace{\lim y}_{\Omega} \leq \underbrace{\lim z}_{\Omega}$$

$\lim y = \Omega$ por teorema del Sandwich.

Desigualdades de Bernoulli

I) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall h > -1)$ $\boxed{(1+h)^n \geq 1+nh}$

II) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall h > 0)$ $\boxed{(1+h)^n \geq 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2}$

III) $(\forall n \in \mathbb{N}) \wedge u \in (-1, \frac{1}{n})$ $\boxed{(1+u)^n \leq \frac{1}{1-nu}}$

Sirven para hacer Sandwich.

Límites importantes:

1) $s_n = a$ $\qquad \lim s_n = a$

2) $\lim \frac{1}{n^k} = 0$; $k \in \mathbb{N}$

3) $S_n = n^k \to$ no tiene límite, diverge

4) $s_n = \dfrac{a_p n^p + \dots}{b_q n^q + \dots}$ $\begin{cases} \text{si } p<q & S_n \to 0 \\ \text{si } p=q & S_n = \frac{a_p}{b_q} \\ \text{si } p>q & S_n \text{ diverge} \end{cases}$

Sea $a_n \to a$

5) $e^{a_n} \to e^{a}$

6) $\dfrac{e^{a_n} - 1}{a_n} \to 1$

- Límites de funciones

Sea A el conjunto del dominio.

Sea $\bar{x}$ el punto de acumulación (a donde tiende el límite)

1) $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \mid 0 \leq |x - \bar{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$

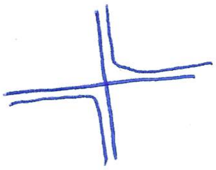
desde el cual converge

2) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists m > 0, \forall x \in A \mid x \geq m \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$

3) $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \mid 0 \leq |x - \bar{x}| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq M$

4) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \iff \forall M > 0, \exists m > 0, \forall x \in A \mid x \geq m \Rightarrow f(x) \geq M$

ASÍNTOTAS



→ Asíntotas horizontales: calcular límites hacia $\pm\infty$

→ Asíntotas verticales: calcular límites a un $\bar{x}$, $\to \boxed{\bar{x}^+ \wedge \bar{x}^-}$

sirve usar los x en los cuales la f(x) se indetermina.

→ Asíntotas oblicuas:

forma general $\boxed{y = mx + n}$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$$

FUNCIÓN EXPONENCIAL

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$$

$\boxed{\text{función inversa de } \exp = \ln}$

↳ Desigualdades fundamentales

$$\underbrace{\boxed{1-\frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x-1} \quad \wedge \quad \boxed{1+x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-1/x}}}$$

Sirven para hacer Sandwich.
(También es legal usar Sandwich con funciones.)

Límites conocidos

1) $\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$

2) $\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

4) $\lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

6) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

7) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0;\ a\in\mathbb{R}$

-Derivadas

¿Qué es?
La derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.

¡!

Definición =

$$f'(x_0) = \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

Derivadas conocidas =

1) $x^{n\prime} \to nx^{n-1}$

2) $\ln(x)' \to 1/x$

3) $e^{x\prime} \to e^x$

4) $\operatorname{sen}(x)' \to \cos(x)$

5) $\cos(x)' \to -\operatorname{sen}(x)$

6) $\operatorname{tg}(x)' \to \sec^2(x) = 1/\cos^2(x)$

7) $\sec(x)' \to \operatorname{tg}(x)\sec(x)$

8) $(\sqrt{x})' \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$

9) $\operatorname{senh}(x)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)' \to \cosh(x)$

10) $\cosh(x)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' \to \operatorname{senh}(x)$

11) $\operatorname{tgh}(x)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)' \to \sec^2 h(x)$

Funciones Hiperbólicas

Derivada función inversa =

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}$$

EJEMPLO = $\operatorname{arctg}(x)' = \frac{1}{tg'(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg}(x))}$

Derivación implícita = Cuando una variable es dependiente de la otra.

→ Ejemplo: "y" dependiente de "x"

$$\left(3x^2 + 5y^6 - 9 = 0\right)'$$

$$6x + 30y^5 \cdot y' = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{-6x}{30y^5} = \boxed{\frac{-x}{5y^5} = y'}$$

Derivadas de orden superior =

Cuando tu función es muy grande... aplicar ln y luego derivar.

$\ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ → despejar $f'(x)$

→ Ejemplo: $f(x) = \frac{h(x) \cdot g(x) \cdot t(x)}{u(x) \cdot v(x)}$ / $\ln(f(x))$

$$\ln(f(x)) = \ln(h(x)) + \ln(g(x)) + \ln(t(x)) - \ln(u(x)) - \ln(v(x)) \quad / ()'$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{h'(x)}{h(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{t'(x)}{t(x)} - \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = f(x)\left(\frac{h'}{h} + \frac{g'}{g} + \frac{t'}{t} - \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right)$$

PROPIEDADES DERIVADAS =

→ Suma = $(f+g)' = f' + g'$

→ Resta = $(f-g)' = f' - g'$

→ Producto = $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

→ Cuociente = $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

→ Regla de la cadena =

$(f \circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Ejemplo = $\left(\sqrt{2x}\right)'$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot (2x)' = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2$$

Derivadas n-ésimas:

1) $(e^x)^{(n)} = e^x$

2) $(e^{-x})^{(n)} = (-1)^n e^x$

3) $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$

4) $(e^{-ax})^{(n)} = (-1)^n a^n e^{-ax}$

5) $(\text{sen}(x))^{(n)} = \text{sen}(n\pi/2 + x)$

6) $(\cos(x))^{(n)} = \cos(n\pi/2 + x)$

↳ Leibnitz

$$\boxed{(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}}$$

→ elegir a f como la que al ser derivada un par de veces, se convierte rápidamente en cero

L'Hôpital:

Usar cuando se calcula un límite y al introducir el valor al que tiende x directo en la función da $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ ó $0 \cdot \infty$

$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = \frac{0}{0}$; usar $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})}$ → derivar arriba y abajo, no como $(f/g)'$

Polinomio de Taylor

$$\boxed{P_T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}$$

Si $x_0 = 0$

$$P_T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$