MA1101-3 Introducción al Cálculo
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 11:Más sucesos entre Sándwich y límites $e^x \wedge \ln x$

06 de Junio de 2019

P1. ***[Calcular límite]*** Calcule.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

P2. ***[Calcular Límites]*** Calcular los siguientes límites, si es que existen

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(1+e^n+e^{2n}+e^{3n}\right)$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n}\right)}$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n+b}{a^n-n}$ En los casos $a \in (0,1) \wedge a > 1$

P3. ***[Recordemos convergencia]***
Demuestre usando la definición de convergencia.
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-(-1)^n} = 0$

P4. ***[Constante Euler-Mascheroni]BRÍGIDO***
Demuestre que $X_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{1}{k} - \ln(n)$ e $Y_n = X_n - \frac{1}{n}$ son convergentes y que tienen igual límite.

P5. ***[Su sesión de Sucesión a mil]***
Considere (S_n) definida por:

$$S_n = \left(\frac{an+1}{2n}\right)^n \text{ con } a \in (0,\infty) \text{ fijo}$$

a) Demuestre que si $0 < a < 2, S_n$ converge y calcule su límite.

b) Demuestre que si $a > 2, S_n$ no es acotada ni convergente.

c) Estudie el límite de S_n cuando a=2, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n$$

d) Estudie el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\left(\frac{an+1}{2n}\right)^n}$$

P6. *[Función acotada*
Sea $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, una función tal que

$$1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x - 1, \forall x > 0$$

a) Demuestre que dada una sucesión (u_n) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(1)$$

.

b) Si además se sabe que $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$ calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(u_n)}{u_n - 1}$$

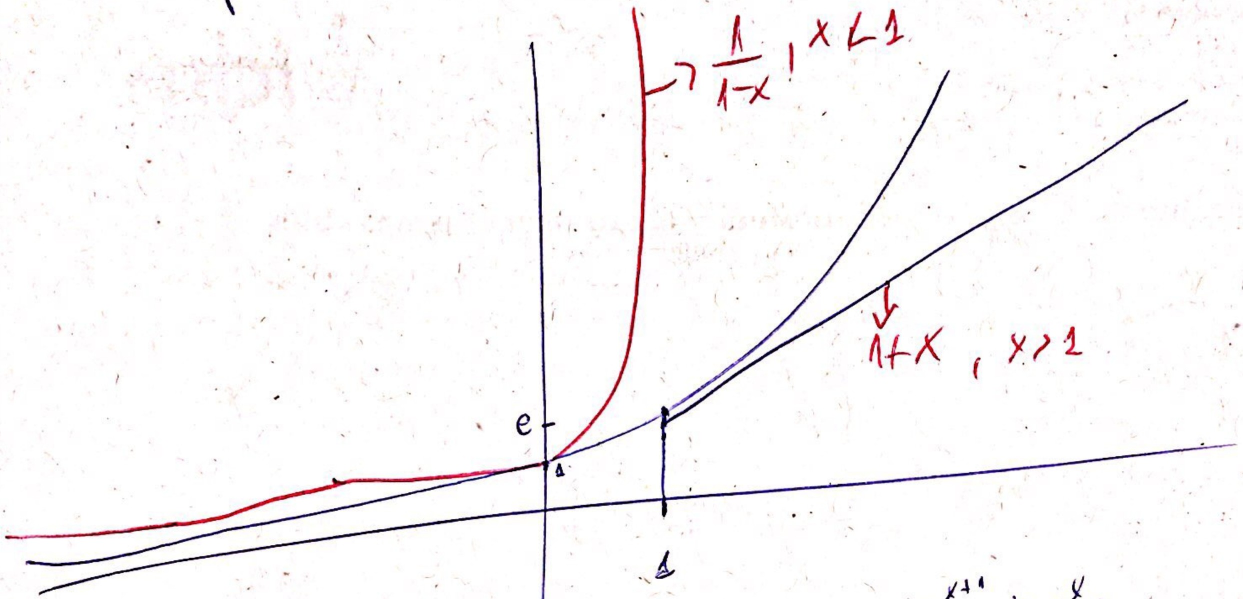
P7. Considere que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$u_n = \frac{n^n}{n! \cdot e^n}$$

a) Calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ y deduzca si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente o decreciente

b) Demuestre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Exp

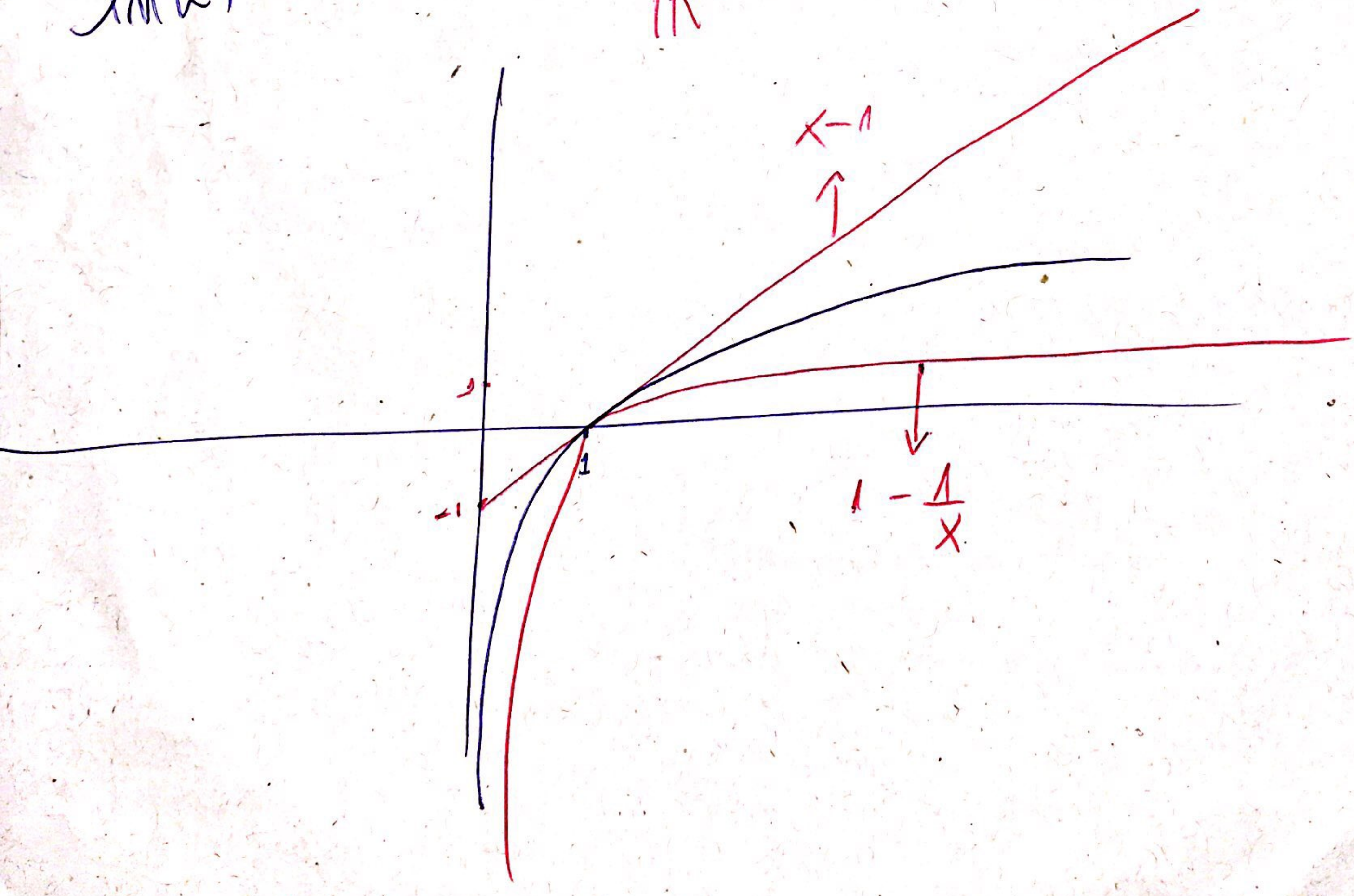


$$e^x \le e^{x+1} \le e^x e$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$

ln(x)

$\mathbb{R}^+$



Teorema Bernoulli I.

I) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall h > -1)\ (1+h)^n \geq 1 + nh.$

Sucesión Importante

q^n , 1) $\lim q^n = 1$, si $q = 1$

2) $\lim q^n = 0$, si $|q| < 1$

3) $\lim q^n$ no existe si $q \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

$\sqrt[n]{a}$, $a \in (0, \infty)$

$\sqrt[n]{a} \to 1$, $\forall a \in (0, \infty)$.

Bernoulli II

II) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall h > 0)\ (1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2$

$\sqrt[n]{n} \to 0$

III $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall u \in (-1, \frac{1}{n}))$, $(1+u)^n \leq \frac{1}{1 - nu}$

Teorema S[redacted].

Def: Sea (S_n) , si $\forall n \geq n_0$ $S_{n+1} \geq S_n$ creciente.

- Sea (S_n), Si $\forall n \geq n_0$, $S_{n+1} \leq S_n$ decreciente.

TSM

Si (S_n) es sucesión (estrictamente) creciente o decreciente a partir de un n_0 y acotada superiormente o inferiormente respectivamente, entonces converge.

Límite conocido 1) $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Teorema $\forall x \in \mathbb{R}$ la sucesión

$S_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ converge.

La función exponencial:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1+x$

$\forall x < 1$, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ Very Important.

$\Rightarrow$ $1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$, $\forall x\ x<1$

La función logaritmo:

$\forall x \in (0, \infty)$ $1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$

- Para $a > 0$

$$a^x = e^{(x \ln(a))}$$

$\log_a x = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

exponencial y su continuidad

$$\lim e^{a_n} \to e^a$$

$\lim \left(\dfrac{e^{a_n} - e^a}{a_n - n} \right) \to e^a$

- Versión log.

1) $\lim \ln(a_n) \to \ln a$

2) $\left(\dfrac{\ln(a_n) - \ln(a)}{a_n - a} \right) \to \dfrac{1}{a}$

Scanned with CamScanner

P1)

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

notamos

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$
$$= \ln(k+1) - \ln(k)$$

$$\Rightarrow \lim \frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m} \ln(k+1) - \ln(k)\right]$$

telescópica! #intuición

$$= \lim \frac{1}{m}\left[\cancel{\ln(2)} - \ln(1) + \cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)} + \cdots + \cancel{\ln(m)} + \cancel{\ln(m-1)} + \ln(m+1) - \cancel{\ln(m)}\right]$$

$$= \lim \frac{1}{m}\left[\ln(m+1) - \ln(1)\right] = \lim \frac{1}{m}\cdot\ln\left(\frac{m+1}{1}\right)$$
$$= \lim \ln\left(\sqrt[m]{m+1}\right) \overset{\text{Álgebra}}{=} \ln\left(\lim \sqrt[m]{m+1}\right)$$

$$\Rightarrow = \ln(1) = 0 \,//$$

Scanned with CamScanner

i) $\lim \underbrace{\frac{1}{n} \ln (e^{n} + e^{2n} + e^{3n} + 1)}$

Esta expresión llamada ▼

Recordemos que $\ln$ es creciente, Así que si quito o sumo positivos ocurre lo usual !!

$$\frac{1}{n} \ln \cancel{e^{3n}} \quad ▼ \leq \frac{1}{n} \ln |4e^{3n}|$$

$$= \frac{1}{n}[(\ln 4) + \ln (e^{3n})]$$

$$= \frac{3n}{n}$$

$$= \frac{\ln|4|}{n} + 3$$

constante.

$$= 3$$

Al aplicar Límite

$$3 \leq \lim ▼ \leq \cancel{\frac{\lim \ln|4|}{n}}^{0} + 3$$

Por Teorema Sándwich.

ii) $X_n = \left(\frac{n+2}{2n} \right)^n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right)^n$

Es del tipo $(q_n)^n$, entonces

estudiemos $\lim q_n = \lim \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} < 1$

Entonces

$$X_n = \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n \longrightarrow 0$$

iii) $y_n = \sqrt[n]{\frac{n+2}{2n}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^{1/n}$

Es del tipo $\sqrt[n]{a_n}$

y por ii $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \longrightarrow \frac{1}{2} > 0$

$\Rightarrow \quad y_n \longrightarrow 1$

iv) $\lim \frac{a^n+b}{a^n-n}$

Si $a \in (0,1) = a^n \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow \lim \frac{a^n+b}{a^n-n} = \lim \frac{a^n+b}{a^n-n} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim \frac{\cancel{\frac{a^n}{n}}^{0} + \cancel{\frac{b}{n}}^{0}}{\cancel{\frac{a^n}{n}}^{0} - 1} = \frac{0}{1} = 0$$

Recordando que $a_n \in (0,1)$ al elevarlo lo voy disminuyendo cada vez más.

Si $a > 1$

$$1 > \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{a^n + b}{a^n - n} \cdot \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{a^n}} = \lim \frac{1 + \frac{b}{a^n}}{1 - \frac{n}{a^n}}$$

$$= \lim \frac{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^n \cdot b}{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^n n}$$

Al igual que el caso anterior, recordamos q^n, si $|q| < 1 \Rightarrow \lim q^n \to 0$

$$\Rightarrow \lim \frac{1 + \cancel{\left(\frac{1}{a}\right)^n b} \to 0}{1 - \underbrace{\cancel{\left(\frac{1}{a}\right)^n \cdot n}}_{|q|^n \cdot n^k} \to 0} = \frac{1}{1} = 1$$

$|q|^n \cdot n^k$ Apunte, gana exponencial

P3) Demuestre usando convergencia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-(-1)^n} = 0$$

Definición de convergencia

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \left|\frac{1}{n-(-1)^n} - 0\right| < \varepsilon$$

Para poder ver todos los casos, tenemos que ver a través de la paridad,

Por lo que

Si n par $\quad n = 2k \ , \ k \in \mathbb{N}$

$$\propto \frac{1}{n-(-1)^n} = \frac{1}{n-(-1)^{2k}} = \frac{1}{n-\underbrace{\left((-1)^2\right)^k}_{1}}$$

$$= \frac{1}{n-1}$$

Si n Impar $\quad n = 2k'-1 \ , \ k' \in \mathbb{N}$

$$\propto \frac{1}{n-(-1)^n} = \frac{1}{n-(-1)^{2k'-1}} = \frac{1}{n+1}$$

$$\left| \frac{1}{n-(-1)^n} - 0 \right|$$

$$\left| \frac{1}{n-(-1)^n} \right|$$

Si fuera par

$$\left| \frac{1}{n-1} \right| \geq 0 \ , \ \forall n \in \{1, 2 \dots\}$$

$$n \geq 1$$

$$\frac{1}{n-1} \geq \quad \forall n \geq 1$$

$$\left| \frac{1}{n-(-1)^n} \right| < \frac{1}{n-1} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \cancel{\ } \quad \frac{1}{\varepsilon} < n-1$$

$$\frac{1}{\varepsilon} + 1 < n \ ,$$

luego para converger basta $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} + 1 \rfloor + 1$

$\forall n \geq n_0$ converge, pues $\left| \frac{1}{1-(-1)^n} - 0 \right| < \varepsilon .$

Scanned with CamScanner

Veamos

X_n y su crecimiento, como bien recordamos se realiza a través de la diferencia entre 2 términos consecutivos de la sucesión

$$X_{n+1} - X_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n)$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \cancel{\frac{1}{n+1} + \ln(n)} //$$

Sabemos que si $x > 0$

$\Rightarrow \ln(x) \leq x - 1$

$$\frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} - 1$$

$$= \frac{1 + n - n - 1}{n+1} = 0$$

$\Rightarrow X_{n+1} - X_n \leq 0$, X_n decreciente.

Scanned with CamScanner

Veamos si está acotada

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

Por desigualdad del log

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \cancel{1} + \frac{1}{k} - \cancel{1}$$

$$= \frac{1}{k} \quad , \forall k \geq 1$$

Entonces $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \quad , \forall k \geq 1$ sumamos hasta $n-1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$(||)$$

$$(|| \quad \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln k+1 - \ln k$$

$$= \cancel{\ln(2)} - \ln(1) + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln(2)} + \ldots \cancel{\ln n-1} - \cancel{\ln n-2} + \ln n - \cancel{\ln n-1}$$

$$= -\cancel{\ln(1)}^{\,0} + \ln(n) = \ln(n).$$

$$\Rightarrow \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$$

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = X_n$$

$0 \leq X_n$ Es ACOTADA!

Entonces por TSM converge. (Este limite le llaman de Euler Mascheroni

Veamos $(y_n) = X_n - \frac{1}{n}$ / lim

~~[illegible]~~ $y_n \leq X_n$ / lim

$\lim y_n \leq \gamma$ Es Acotada.

Veamos crecimiento

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - \frac{1}{n+1} - x_n + \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) + \frac{1}{n}$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n+1}} \underline{- \ln(n+1)} - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \underline{+ \ln(n)} + \underline{\frac{1}{n}}$$

$$= \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n}$$

$$1 - \frac{1}{\frac{n}{n+1}} \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$1 - \frac{n+1}{n} \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \quad / + \frac{1}{n}$$

$$1 - 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n}$$

$$0 \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n} = y_{n+1} - y_n$$

Como es creciente es Acotada superiormente y por TSM converge

Luego $y_n = x_n - \frac{1}{n}$ / lim

$$\lim y_n = \lim x_n - \cancel{\lim \frac{1}{n}}^{\to 0}$$

$$\lim y_n = \lim x_n$$

Ya terminamos!

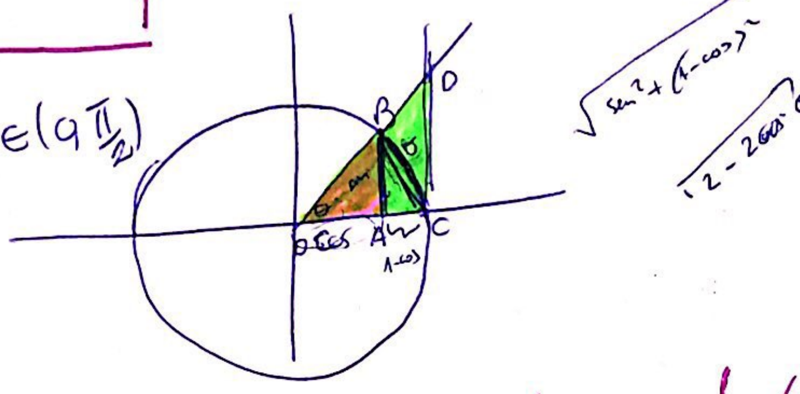
Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl

Demostremos por Teorema del Sándwich.

límite fundamental del sen(x)!!

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1}$$

Sea $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$



Veamos una visión geométrica

$\acute{A}\triangle OAB \leq \acute{A}\triangleleft OCB \leq \acute{A}\triangle OCD$ | $\acute{A}$(Algo) = Área algo

- la desigualdad no cambia, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) > 0$

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\operatorname{tg}(x)}{2} \quad / \cdot 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}, \ \operatorname{sen}\theta \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\theta) \leq \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \leq \frac{1}{\cos\theta} \quad / ( )^{-1}, \ \operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos\theta} \geq \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \geq \cos\theta \quad / \text{Aplicando límite}_{\theta\to 0}$$

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\cos\theta} \geq \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \geq \lim_{\theta\to 0} \cos\theta$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$1 \qquad\qquad 1$$

$\Rightarrow$ Por TEOREMA Sándwich $\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$

$f(x) = -f(-x)$

Pero sabemos que $\operatorname{sen}\theta$ es impar, en conjunto a θ, entonces $f(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \dfrac{-\operatorname{sen}(-\theta)}{-(-\theta)} = \dfrac{\operatorname{sen}(-\theta)}{-\theta} = f(-\theta)$

$\Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} = f(\theta)$ es par, simétrica

$\Rightarrow \lim\limits_{\theta \to 0} f(\theta) = \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \lim\limits_{\theta \to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$ $\boxed{//}$

1) Evaluar y ver si es indeterminación
2) Álgebra límites y con conocidos llegar al límite

P1) a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2+2}{\cos(\pi x)}$ lo primero que debemos hacer, es evaluar, pues

en este caso por alg. de límites, no hay indeterminación

1) no ocurre por lo que solo reemplazo

$= \dfrac{5^2+2}{\cos(5\pi)} = \dfrac{27}{-1} = -27$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{x+2}}{x-2}$, si evalúo

1) es $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x-2} \cdot \underbrace{\frac{(x + \sqrt{x+2})}{(x+\sqrt{x+2})}}_{1}$$

2)

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x+\sqrt{x+2})} \quad , x \neq 2 \rightarrow \text{condiciono } x \neq 2$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}} = \frac{3}{2+\sqrt{4}} = \frac{3}{4} \,//$$

} realizo el límite $\rightarrow 2$.

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x) - x}{x^k} \quad , k \in \{1, 2\}$$

$\underline{k=1}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x) - x}{x^1} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} - 1$$

límite conocido Pag 199 Apunte

$$= 1 - 1 = 0 \,//$$

$k=2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x) - x}{x^2} .$$

Lo haremos por $\underline{\text{teo}}$ sándwich.

Por introducción pág 11 , $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\bar{x} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

de  $\operatorname{sen}(x)\cos(x) \leq x \leq \operatorname{tg}(x) \quad / \cdot(-1)$

$\Leftrightarrow \quad -\operatorname{tg}(x) \leq -x \leq -\operatorname{sen}(x)\cos(x) \quad / + \operatorname{sen}(x)$

$\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(x) - \operatorname{tg}(x) \leq \operatorname{sen}(x) - x \leq \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)\cos(x) \quad / \cdot \frac{1}{x^2} \quad x \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{tg}(x)}{x^2} \leq \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} \leq \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)\cos(x)}{x^2}$ / factorizo $\leftarrow \operatorname{sen}(x)$ $\rightarrow \operatorname{sen}(x)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(x)\left[1 - \frac{1}{\cos(x)}\right]}{x^2} \leq \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\left[\frac{1 - \cos(x)}{x}\right]$ / sumo $\leftarrow$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\left[\frac{\cos(x) - 1}{\cos(x)\, x}\right] \leq \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\left[\frac{1 - \cos(x)}{x}\right]$ / factorizo (-1) $\leftarrow$ Paso anterior

$\Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}(-)\left[\frac{1 - \cos(x)}{\cos(x)\, x}\right] \leq \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} \leq \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\left[\frac{1 - \cos(x)}{x}\right]$ / $\lim_{x \to 0}$

Recordemos $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$

$\cos(0) = 1$

$\lim_{u \to 1} \frac{\ln u}{u - 1} = 1$

$\lim_{u \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Sándwich de sandía.

tomando límite $x \to 0$

$\Leftrightarrow \quad 1 \cdot (-1) \cdot \frac{0}{1} \leq \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} \leq 1 \cdot 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} = 0$ //

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos[x]}{[x]^2}$, la función está mal definida para $x \in [0,1)$

Notar que si $x \in [0,1)$ no está definido

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos[x]}{[x]^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos[x]}{[x]^2} \Rightarrow x \in [-1,0)$$

$$= \cancel{\lim_{x\to 0}} \frac{1-\cos(-1)}{1} = 1-\cos(-1)$$

Lo que ocurre acá es que como está indefinido para $x \to 0^+$, es decir $x \in [0,1)$, no tenemos límites laterales iguales, pero para poder dar una expresión calculamos el límite por izquierda!

e) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x(|x-3|-5)}{x^2-4}$

1) Evaluamos

$$\frac{2(|-2-3|-5)}{4-4} = 2\cdot\frac{0}{0}$$

2) Notemos que $|x-3|$ cambia su comportamiento según donde partemos x

si $x \in (3, \infty^+) \Rightarrow |x-3| = x-3$

si $x \in (-\infty, 3] \Rightarrow |x-3| = 3-x$

- Como estamos tomando límite $x \to -2$ podemos tomar una vecindad, mientras contenga -2 !

- tomamos (como es debido) $x \in (-2-\varepsilon, -2+\varepsilon)$ una vecindad de -2, $\varepsilon > 0$, en particular $\varepsilon = 2$.

Arbitrario, $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow x \in (-4, 0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2} \frac{x(|x-3|-5)}{x^2-4} = \lim_{x \to -2} \frac{x(3-x-5)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{-x\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{-x}{x-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \,//$$

Propuesto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^k} \quad , \; k \in \{1, 2, 3, \text{———}\, n\}$$

De qué depende?

El que me muestre desarrollo ~~antes~~ se ganará un dulce, Hasta agotar stock!

9) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(\pi x)}{\operatorname{sen}(x^2)} \cdot \underbrace{\dfrac{x^2\pi^2}{x^2\pi^2}}_{1}$ C.V.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{(\pi x)^2} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{1} \cdot x^2 \cdot \pi^2$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{(\pi x)^2} \cdot \frac{1}{\left[\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\right]} \cdot \pi^2$$

♡ ★

♡ luego $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(\pi x)}{(\pi x)^2}$, si $u=\pi x$ cuando $x\to 0 \Rightarrow u\to 0$ || justificación importante

$\Rightarrow \lim_{u\to 0} \dfrac{1-\cos(u)}{u^2} = \dfrac{1}{2}$ } límite conocido

★ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}$, si $v=x^2$ cuando $x\to 0 \Rightarrow v\to 0$ ||

$\Rightarrow \lim_{v\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(v)}{v} = 1$ } límite conocido

Entonces nuestro límite final queda como

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{(\pi x)^2} \cdot \frac{1}{\left[\dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\right]} \pi^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{[1]} \cdot \pi^2 = \frac{\pi^2}{2} //$$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(3-x)}{e^{2(x-2)}-1} \cdot \underbrace{\dfrac{[(3-x)-1]}{[(3-x)-1]}}_{1}$

Por qué? querer formar $\lim\limits_{u \to 1} \dfrac{\ln(u)}{u-1}$ conocido

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(3-x)}{[(3-x)-1]} \cdot \dfrac{2-x}{(e^{2(x-2)}-1)} \cdot \dfrac{2}{2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(3-x)}{[(3-x)-1]} \cdot \dfrac{2(x-2)}{e^{2(x-2)}-1} \cdot -\dfrac{1}{2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(3-x)}{[(3-x)-1]} \cdot \dfrac{1}{\left[\dfrac{e^{2(x-2)}-1}{2(x-2)}\right]} \cdot -\dfrac{1}{2}$

Sea $u = 3-x$, $x \to 2$
$\Rightarrow u \to 1$
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(3-x)}{[(3-x)-1]} = \lim\limits_{u \to 1} \dfrac{\ln(u)}{u-1} = 1$

Sea $w = 2(x-2)$, $x \to 2$
$w \to 0$
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^{2(x-2)}-1}{2(x-2)} = \lim\limits_{w \to 0} \dfrac{e^{w}-1}{w} = 1$

$= 0/0 = 1 \cdot \dfrac{1}{1} \cdot -\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

c) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/\operatorname{sen}^2(x)}$

1) Evaluar $\Rightarrow 1^{1/0}$

2) Matraca.

Propiedad consistencia. $e^{\ln(a^n)} = a^n$, siempre que e^x y $\ln(x)$ estén bien definidas.

$$\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{1/\operatorname{sen}^2(x)} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\ln\left(\cos(x)^{1/\operatorname{sen}^2(x)}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \cdot \ln(\cos(x))\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \exp\left[\frac{\ln(\cos(x))}{1-\cos^2(x)}\right]$$

Luego $h = \cos(x)$, si $x \to 0$

$h \to 1$

$$= \lim_{h\to 1} \exp\left[\frac{\ln(h)}{1-h^2}\right] = \lim_{h\to 1} \exp\left[\frac{\ln(h)}{-(h-1)(1+h)}\right]$$

Por continuidad de e^x y $\ln(x)$ puede entrar el límite, además de alg de límites

$$= \exp\left[\lim_{h\to 1}\frac{\ln(h)}{h-1} \cdot \frac{-1}{1+h}\right] = \exp\left[1 \cdot \frac{-1}{1+1}\right] = e^{-\frac{1}{2}} \,//$$

Scanned with CamScanner

d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x - x^2} = \lim_{x\to 0} e^{x^2}\frac{\left[e^{x-x^2} - 1\right]}{x - x^2}$

$u = x - x^2$, $x \to 0 \Rightarrow u \to 0$ $\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^2} - 1}{x - x^2} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u}$

$\Rightarrow = e^{0^2} \cdot 1 = 1$ //

e) $\lim_{x\to 1} (1-x)\, tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ (1)

$= \lim_{x\to 1} (1-x) \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

#veamos si $w = 1 - x$

$x \to 1 \Rightarrow w \to 0$ $\quad \frac{\pi}{2}x = (1-w)\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim_{w\to 0} \frac{w}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - w\frac{\pi}{2}\right)}$

$= \lim_{w\to 0} \frac{w}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}w\right)}$

$= \lim_{w\to 0} \frac{1}{\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}w\right)}{\frac{\pi}{2}w}\right]} \frac{1}{\frac{\pi}{2}}$

$v = \frac{\pi}{2}w$, $w \to 0 \Rightarrow v \to 0$

(2) $= \lim_{v\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(v)}{v}} \cdot \frac{2}{\pi} = 1 \cdot \frac{2}{\pi}$

(3) Luego junto todo

$\lim_{x\to 1} (1-x)\, tg\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \underset{\operatorname{sin}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\overset{x\to 1}{1}}$

Recordar lo más importante para el cambio de variable es que una vez que hacen esto no puede quedar con la variable anterior, y tender todo al mismo tiempo.

Scanned with CamScanner

P3 | a)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|\text{sen}\, x| - |x|}{x}$$

Veamos que podemos estudiar la vecindad $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}(x) - x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}(x)}{x} - 1 = 1 - 1 = 0$$

b)

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|\text{sen}\, x|| - |x|}{x}$$

Veamos que podemos estudiar $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{-\text{sen}(x) + x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -\left[\frac{\text{sen}(x)}{x}\right] + \frac{x}{x} = -1 + 1 = 0$$

Como límites laterales son iguales el límite Existe y vale 0.

Terminamos!! Recuerden
postear sus dudas o preguntarme
por algún medio.
pgamez@dim.uchile.cl.

P1) MA1001 - 2012 (P1 b)

Demuestre usando la definición.

I) $\lim_{x \to \infty} x^3 = +\infty$

Recordemos $\forall M > 0, \exists m > 0, \forall x \geq m, f(x) = x^3 \geq M$

Lo que no entrego

$f(x) = x^3 \leq M \quad / \sqrt[3]{\ }$

$\Rightarrow \quad x \leq \sqrt[3]{M} \rightarrow$ relación directa con x

$\Rightarrow$ Si $m = \sqrt[3]{M}$

Lo que entrego

En efecto dado la definición basta tomar $\underbrace{m = \sqrt[3]{M}}_{\text{Existe } \forall M}$, $M > 0$

Luego esto queda $\forall x \geq \sqrt[3]{M}$

$x^3 \geq (\sqrt[3]{M})^3 = M$

$\Leftrightarrow f(x) \geq M$ ■

II) Demostrar $\lim_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \nexists$

Sabemos que si el Límite existe $\Rightarrow$ es único

Sea $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad x_n \rightarrow 0^+$

$v_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad v_n \rightarrow 0^+$

Luego $\lim_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{1/2n\pi}\right) = \lim_{x \to 0^+} \sin\left(1/\left(1/(2n\pi + \pi/2)\right)\right)$

cambia porque tiende $\lim_{n \to \infty} \sin(2n\pi) = 0 \overset{?}{=} \lim_{n \to \infty} (2n\pi + \pi/2) = 1$ $\quad \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\times \quad \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Scanned with CamScanner

Aux 2016 - 5> ...

III) $\lim_{x \to 8} \frac{x-6}{2} = 1$

Lo primero es anotar la definición particularizado al caso que tenemos como $x \to 8$ y $\lim \% = 1$ es acotada en su límite y tendencia

Por lo que debemos usar ε-δ

$$\lim_{x \to 8} \frac{x-6}{2} = 1 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \overbrace{|x-8| < \delta}^{p} \Rightarrow \overbrace{\left|\frac{x-6}{2} - 1\right| < \varepsilon}^{q}$$

Demostraremos a través de encontrar la existencia de δ para cumplir con la condición de ε. arbitrario.

Tomaremos un lado de la implicancia y llegaremos al otro, este desarrollo debe ser a través de equivalencias. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow$ hipótesis $\Rightarrow$ tesis

Estudiaremos $q \Leftrightarrow \left|\frac{x-6}{2} - 1\right| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x-8}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x-8|}{|2|} < \varepsilon \Leftrightarrow \underbrace{|x-8| < 2\varepsilon}_{\text{tengo la hipótesis.}}$$

El paso más Importante.

Lo que tengo $|x-8| < \delta$

Lo que quiero llegar $|x-8| < 2\varepsilon$

Así basta tomar $\delta = 2\varepsilon$ para tener lo pedido

IV) PDQ !! $\left[\lim_{x\to 1}(2x^2-1)=1\right] \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\ |x-1|<\delta \Rightarrow |2x^2-1-1|<\varepsilon$

Tenemos $|x-1|<\delta \Rightarrow |2x^2-2|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow 2|x+1||x-1|<\varepsilon$

En este caso tenemos parcialmente la hipótesis $|x-1|<\delta$, pero no puede depender δ de x ni de nada.

\# Supongamos $|x-1|<1$ → arbitrario!!

$\Leftrightarrow -1<x-1<1$ → no vacío y acotado =

$\Leftrightarrow 0<x<2$, $x\in(0,2)=A$ $\sup_{x\in A} A=2$, $\inf_{x\in A} A=0$.

$\Leftrightarrow 1<x+1<3$, $(x+1)\in(1,3)=B$, $\sup_{x\in B} B=3$, $\inf_{x\in B} B=1$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Esta será una condición adicional que impondré.}}$

luego $2\overbrace{|x+1|}^{\text{a lo más llega a 3, sup.}}|x-1|$ [redacted]

$\leq 2\sup_{x\in B} B\cdot|x-1|$

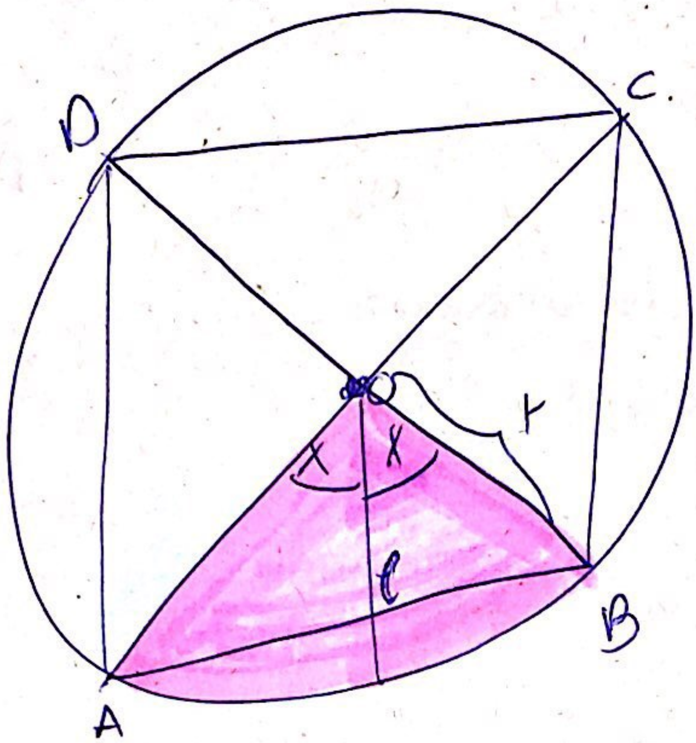
$=2\cdot 3\,|x-1|<\varepsilon$

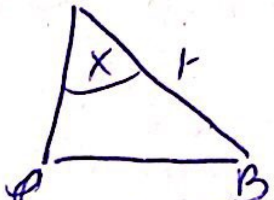
$\Leftrightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{6}$

De esta forma tenemos $|x-1|<\delta$ y queremos tener $|x-1|<\frac{\varepsilon}{6}$ $\Leftrightarrow |2x^2-2|<\varepsilon$

Para esto basta tomar $\delta=\frac{\varepsilon}{6}$, pero en # supusimos algo, por lo que hay que tomarlo, luego $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{6}\right\}$ Así se cumplen ambos simultáneamente

P2)





$\operatorname{sen}(x) = \dfrac{\overline{eB}}{r}$

$A' \triangleleft AOB$, fórmula general área sector circular

$\frac{1}{2}\theta r^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} r^2 (2x) = A \triangleleft AOB$$

$A' \square ABCD = AB \cdot BC = 4 \operatorname{sen}(x) \cos(x) r^2$

$AB = 2\overline{eB} = 2 \operatorname{sen}(x) \cdot r$

$BC = 2\overline{eO} = 2 \cos(x) \cdot r$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{A \triangleleft AOB(x)}{A \square ABCD(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{r^2} \cdot \cancel{2}x}{4 \operatorname{sen}(x) \cos(x) \cdot \cancel{r^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right]} \cdot \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4} //$$

P3) $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(1+e^x)(x^2-4)}$$

a) Primero debemos definir bien el dominio

$e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$0 \neq e^x + 1 > 1, \forall x \in \mathbb{R}$ Así que no causa problema.

$x^2 - 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\Rightarrow A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

Crecimiento: $x_1 < x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(x_1^3 - 2x_1^2)}{(1+e^{x_1})(x_1^2-4)} - \frac{(x_2^3 - 2x_2^2)}{(1+e^{x_2})(x_2^2-4)}$$

Esta parte se omite pues no es lo que busca el ejercicio.

Signos $\dfrac{x^2(x-2)}{(1+e^x)(x^2-4)}$

	$-\infty$	-2	0	2	∞
x^2	+		+	+	+
$1+e^x$	+		+	+	+
$x-2$	-		-	-	+
$x-2$	-		-	-	+
$x+2$	-		+	+	+
	-		+	+	+

¿Que ocurre com $x=-2,\ x=2$?

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2\cancel{(x-2)}}{(1+e^x)\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2}{(1+e^x)(x+2)}$$

$$= \frac{\cancel{4}}{(1+e^2)\cdot\cancel{4}} = \frac{1}{e^2+1}$$

Como es um ponto abierto no es Asíntota vertical.

$$\lim_{x\to -2^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{x^3-2x^2}{(1+e^x)(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{x^2}{(1+e^x)(x+2)} = \pm\infty$$, por como se comporta x^2, $1+e^x$.

$x=-2$ Asíntota vertical.

ii) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x-2)}{(1+e^x)(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{x}{e^x+1}}^{0} \cdot \overbrace{\frac{x^2-2x}{x^2-4}}^{1} = 0$$

$\lim_{x\to\infty} e^x \gg \lim_{x\to\infty} x$ | luego $y=0$ es A. H.

$$\lim_{x\to -\infty} \overbrace{\frac{x}{e^x+1}}^{-\infty} \cdot \overbrace{\frac{x^2-2x}{x^2-4}}^{1} = -\infty$$, no es A. H.

Scanned with CamScanner

iii) $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = m$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x+1} \cdot \frac{x^2-2x}{x^2-4} = 1$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x+1} \cdot \frac{x^2-2x}{x^2-4} - \overbrace{x \frac{(e^x+1)(x^2-4)}{(e^x+1)(x^2-4)}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3-2x^2+(-xe^x-x)(x^2-4)}{(e^x+1)(x^2-4)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^3}-2x^2-x^3e^x+4xe^x-\cancel{x^3}+4x}{(e^x+1)(x^2-4)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x-2x^2}{(e^x+1)(x^2-4)} + \frac{e^x[4x-x^3]}{(e^x+1)(x^2-4)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{4x-2x^2}{(e^x+1)(x^2-4)}}_{\to -2} + \underbrace{\frac{e^x-x\cancel{(x^2-4)}}{(e^x+1)\cancel{(x^2-4)}}}_{\to 0} = \underline{-2} \,\Big|= n$$

$y = x-2$ Oblicua.