Auxiliar 14 : Preparación Examen Cálculo

* Derivada: la pendiente a la recta tangente a la curva en un punto

¿Cuándo usar L'Hôpital?

(1) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

(2) $\frac{\infty}{\infty}$ ya que $\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{0}{0}$

(3) $\infty - \infty \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) - g(x) = \infty - \infty \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x) \cdot f(x)}} \Rightarrow \lim \frac{f(x) - g(x)\,(g(x) \cdot f(x))}{(g(x) \cdot f(x))}$

$= \frac{\cancel{\frac{1}{\infty}}^{0} - \cancel{\frac{1}{\infty}}^{0}}{\cancel{\frac{1}{\infty \cdot \infty}}} = \frac{0}{0}$

(4) $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \infty$

$= \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$

P1) Calcule usando reglas básicas:

a- $f(x) = x^4 + 3x^2 - 6 \Rightarrow f'(x) = (x^4)' + 3(x^2)' - \cancel{(6)'}^{0}$

$= \underbrace{4x^3 + 6x}$

/ En efecto, es la derivada de un polinomio.

b- $f(x) = \overbrace{(a + x)}^{f} \overbrace{\sqrt{a-x}}^{g} = f' \cdot g + f \cdot g'$

$f'(x) = (a+x)' \cdot (\sqrt{a-x}) + (a+x) \cdot (\sqrt{a-x})'$

$= 1 \cdot (\sqrt{a-x}) + (a+x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{a-x}} \cdot -1$

Por apunte $(\sqrt{a-x})' = 1/2\sqrt{a-x}$

c-. $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\underbrace{sen(x)}_{f}}{\underbrace{\cos(x)}_{g}} \Rightarrow \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

$\cdot \tan(x)' = \dfrac{\cos(x) \cdot \cos(x) - sen(x) \cdot (-sen(x))}{\cos^2(x)}$

$= \dfrac{\cos^2(x) + sen^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = \boxed{\sec^2(x)}$

$x' \cdot e^x + x \cdot e^{x'}$

$1 \cdot e^x + x \cdot e^x$

producto

i- $f(x) = \dfrac{\overbrace{e^x + sen(x)}^{f}}{\underbrace{x \cdot e^x}_{g}} \rightarrow f'(x) = \dfrac{[e^x \cdot 1 + \cos(x)] \cdot x \cdot e^x - [e^x + sen(x)] \cdot [x \cdot e^x]'}{[x \cdot e^x]^2}$

$f'(x) = \dfrac{[e^x \cdot 1 + \cos(x)] \cdot x \cdot e^x - [e^x + sen(x)] \cdot [e^x + x \cdot e^x]}{[x \cdot e^x]^2}$

* Extra: $f'(x) = (x^x)'$

$= (\exp(\ln(x^x)))'$

$= [e^{x \cdot \ln(x)}]'$ \regla de la cadena

$= e^{x \cdot \ln(x)} \cdot (x \cdot \ln(x))'$

$= e^{x \cdot \ln(x)} \cdot (1 \cdot \ln(x) + x \cdot 1/x)$

P2) Calcule usando regla de la cadena.

a-. $f(x) = (e^{3x^2})' \Rightarrow e^{3x^2} \cdot (3x^2)' = e^{3x^2} \cdot 6x$

c- $f'(x) = sen^2(x)' \Rightarrow 2 \cdot sen(x) \cdot \cos(x)$

$[(sen(x))^2]$ otra forma de verlo

e- $f'(x) = \left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)' \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \left(1+\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

h- $f'(x) = \left(e^{\tan(x^2)+x^2}\right)'$

$= e^{\tan(x^2)+x^2} \cdot \left(\tan(x^2)+x^2\right)'$

$= e^{\tan(x^2)+x^2} \cdot \left(\sec^2(x^2)\cdot 2x + 2x\right)$

P4 b-. $h(z) = z^2 + 2 \rightarrow$ derivada

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(z+h)^2+2-z^2-2}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{z^2}+2zh+h^2+\cancel{2}-\cancel{z^2}-\cancel{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h}(2z+h)}{\cancel{h}} = 2z$

P11 $g(x) = e^{x^2}$ (1)

a) P.d.q: $g'(x) = 2x \cdot g(x)$

$g'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2x \cdot g(x)$

Leibnitz: $(f \cdot g)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$

Demuestre: $g^{(n+1)}(x) = 2\left(n g^{(n-1)}(x) + x g^{(n)}(x)\right)$

→ Antes de la hipótesis
$g'(x) = 2x\,g(x)$
$g'(0) = 0$

• mi hipótesis: $g'(x) = 2x\,g(x) \quad /()^{(n)}$

$[g'(x)]^{(n)} = [2x \cdot g(x)]^{(n)}$ \ cte sale

$[g(x)]^{(n+1)} = 2 \cdot [x \cdot g(x)]^{(n)}$

$= 2\left[\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} \cdot g^{(n-k)}(x)\right]$ \ ocupé Leibnitz

$= 2\left[\underbrace{\binom{n}{0}} x^{(0)} \cdot g^{(n)}(x) + \underbrace{\binom{n}{1}} \cdot \underbrace{x^{(1)}} \cdot g^{(n-1)}(x)\right]$ \ después de la segunda derivada $k \geq 2$, son todo ceros

$= 2\left[1 \cdot x \cdot g^{(n)}(x) + n \cdot 1 \cdot g^{(n-1)}(x)\right]$

$= 2\left[x \cdot g^{(n)}(x) + n\,g^{(n-1)}(x)\right]$

P10) Aplicación operador logarítmico: Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación, en un punto P, donde su ordenada es nula, $x > 0$.

$$\underbrace{\ln\left(\tfrac{3}{4} + x^2 + y\right)}_{(\star)} = \underbrace{\operatorname{sen}(xy)}_{(\heartsuit)} \qquad * \; f(x) = y$$

(a) Encontrar relación entre x e y $\longrightarrow$ Entonces reemplazaremos con $y = 0$

$$\ln\left(\tfrac{3}{4} + x^2\right) = \operatorname{sen}(0) \to 0$$

$$\ln\left(\tfrac{3}{4} + x^2\right) = 0 \quad / \text{APLICO EXPONENCIAL}$$

$$\exp\left(\ln\left(\tfrac{3}{4} + x^2\right)\right) = e^0$$

$$\tfrac{3}{4} + x^2 = 1 \quad / -\tfrac{3}{4}$$

$$x^2 = \tfrac{1}{4} \quad / \sqrt{\;}$$

X del punto, en el cual busco la pendiente de la recta $\leftarrow$ $x = 1/2$ $\rightarrow$ ocupamos raíz positiva ya que por enunciado $x > 0$.

$(\star)'$ $\quad \tfrac{3}{4} + x^2 + y > 0$

$$\left[\ln\left(\tfrac{3}{4} + x^2 + y\right)\right]'$$

$$\frac{1}{\tfrac{3}{4} + x^2 + y} \cdot \left(\tfrac{3}{4} + x^2 + y\right)'$$

$$\frac{1}{\tfrac{3}{4} + x^2 + y} \cdot \left(0 + 2x + y'\right)$$

$$\frac{2x + y'}{\tfrac{3}{4} + x^2 + y} \quad (\star)'$$

$(\heartsuit)'$

$$\left[\operatorname{sen}(xy)\right]'$$

$$\cos(xy) \cdot (xy)'$$

$$\cos(xy) \cdot \left[x' \cdot y + x \cdot y'\right]$$

$$\cos(xy) \cdot \left(y + x \cdot y'\right) \quad (\heartsuit)'$$

· Igualo $(A)'$ con $(\heartsuit)'$

$$\frac{2x + y'}{3/4 + x^2 + y} = \cos(xy) \cdot (y + x \cdot y')$$ \ reemplazo con el punto $(1/2, 0)$

$$\frac{2 \cdot 1/2 + y'}{3/4 + 1/4 + 0} = \cos(1/2 \cdot 0) \cdot (0 + 1/2 \cdot y')$$

$$1 + y' = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot y' \quad \Big\backslash -\frac{1}{2} \cdot y' \quad \Big\backslash -1$$

$$\frac{1}{2} \cdot y' = -1$$

$$y' = -2$$ → esta es nuestra pendiente

* Como tenemos un punto perteneciente a la recta y además la pendiente, podemos usar ecuación punto-pendiente para desarrollar

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$ \ reemplazo

$$y = -2\left(x - 1/2\right)$$

Aux Cálculo 25/06. N°14

P1 a) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 6$ → transformación lineal

$$f'(x) = (x^4)' + (3x^2)' - \underbrace{(6)'}_{0}$$
$$= 4 \cdot x^3 + 3(x^2)' - 0$$
$$= 4 \cdot x^3 + 3 \cdot 2x = \boxed{4x^3 + 6x}$$

⊢ derivada de un $P(x)$ ⊣

b) $f(x) = \underbrace{(a+x)}_{f}\underbrace{\sqrt{a-x}}_{g}$ = $(f \circ g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$f'(x) = \underbrace{1 \cdot \sqrt{a-x}}_{f' \cdot g} + \underbrace{(a+x) \frac{1}{2\sqrt{a-x}} \cdot -1}_{f \cdot g'}$$ → * $(\sqrt{f})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{f}} \cdot f'$

c) $f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ * $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$$f'(x) = (\tan x)'$$
$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - (\operatorname{sen} x \cdot -\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \boxed{\sec^2 x}$$

i) $f(x) = \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{x \cdot e^x}$ → ¿Que haremos? : ocupar derivada del cociente

$$f'(x) = \frac{(e^x)' \cdot \operatorname{sen} x - e^x \cdot (\operatorname{sen} x)'}{(x \cdot e^x)^2}$$ * $(x \cdot e^x)' = e^x + x \cdot e^x$

$$= \frac{(e^x \cdot 1 + \cos x)\, x \cdot e^x - (e^x + \operatorname{sen} x)(x \cdot e^x)'}{x^2 (e^x)^2}$$

$$= \boxed{\frac{(e^x + \cos x)(x \cdot e^x) - (e^x + \operatorname{sen} x)(e^x + x \cdot e^x)}{(x \cdot e^x)^2}}$$

Aux Cálculo 25/06 Nº 14.

extra: $f(x) = x^x$

$$f'(x) = (\exp x(\ln x))'$$
$$= (e^{x\cdot \ln x})'$$
$$= e^{x\cdot \ln x}(x\cdot \ln x)'$$
$$= e^{x\cdot \ln x}(\ln x + 1)$$

P2 a) $f(x) = e^{3x^2}$

$$f'(x) = (e^{3x^2})' = e^{3x^2}\cdot 6x$$

c) $f(x) = \text{sen}^2 x$

$*(\text{sen}^2 x)' = [(\text{sen} x)^2]'$

$$f'(x) = (\text{sen}^2 x)' = 2\cdot \text{sen}^{(2-1)} x \cdot \cos x$$
$$= 2\cdot \text{sen} x \cdot \cos x$$

e) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot(1+\sqrt{x})'$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

h) $f(x) = e^{\tan x^2 + x^2}$

$$f'(x) = e^{\tan x^2 + x^2}(\text{tg}\, x^2 + x^2)'$$
$$= e^{\tan x^2 + x^2}[\sec^2(x^2)\cdot 2x + 2x]$$

Aux Cálculo 25/06 N° 14

P4 b) $h(z) = z^2 + 2$

$$h'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{(z+h)^2 + 2}^{h(z+h)} - \overbrace{(z^2+2)}^{h(z)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{z^2} + 2zh + h^2 + \cancel{2} - \cancel{z^2} - \cancel{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2z+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} 2z + \cancel{h}^{\to 0} = \underline{2z}$$

P x) $\ln\left(\frac{3}{4} + x^2 + y\right) = \text{sen}(xy)$

Encontrar recta tangente en $P(x, 0)$ $\boxed{y=0}$

$$\ln\left(\frac{3}{4} + x^2\right) = \text{sen}(x \cdot 0)$$

$$\ln\left(\frac{3}{4} + x^2\right) = 0 \quad / e^x$$

$$\exp\left(\ln\left(\frac{3}{4} + x^2\right)\right) = \exp(0)$$

porque el ejercicio me dice que $x > 0$!!!

$$\frac{3}{4} + x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1/4 \Rightarrow \underline{x = 1/2}$$

Derivemos lado izquierdo $\rightarrow \left[\ln\left(3/4 + x^2 + y\right)\right]'$ $\quad (3/4 + x^2 + y) > 0$

$$= \frac{1}{3/4 + x^2 + y} \cdot \left(\frac{3}{4} + x^2 + y\right)'$$

$$= \frac{1}{3/4 + x^2 + y} \cdot (0 + 2x + y')$$

$$= \frac{2x + y'}{3/4 + x^2 + y}$$

Derivemos lado derecho $\rightarrow [\text{sen}(xy)]'$

$$= \cos(xy) \cdot (x \cdot y)'$$

$$= \cos(xy) \cdot (y + x \cdot y')$$

$$= \underline{\cos(xy) \cdot (y + xy')}$$

Aux Cálculo 25/06. Nº14.

Como lado derecho e izquierdo son iguales, queda:

$$\frac{2x+y'}{\frac{3}{4}+x^2+y} = \cos(xy)\cdot(y+xy')$$ reemplazamos $P(1/2, 0)$

$$\Rightarrow \frac{1+y'}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+0} = \cos(1/2\cdot 0)\left(0+\frac{1}{2}y'\right)$$

$$\Rightarrow 1+y' = \frac{1}{2}y' \Rightarrow \boxed{y' = -2}$$

Como tenemos el punto y la pendiente (y'), podemos ocupar la ecuación de la recta "punto pendiente".

$$y-y_0 = m(x-x_0)$$

$$\Rightarrow y = -2(x-1/2)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -2x+1}$$

P final $g(x) = e^{x^2}$

PDQ $g'(x) = 2x\cdot g(x)$.

$$g'(x) = e^{x^2}\cdot 2x = \underline{2x\cdot g(x)}$$

Aux Cálculo 25/06.

$\boxed{PDQ}$ $g^{(n+1)}(x) = 2\left(n \cdot g^{(n-1)}(x) + x \cdot g^{(n)}(x)\right)$

Leibniz $\rightarrow (f \circ g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$

tenemos que $g'(x) = 2x \cdot g(x) \quad / \ (\ )^{(n)} \longrightarrow$

{ Volvamos un poco... evaluamos eso en $x=0$

$\Rightarrow g'(x) = 2x \cdot g(x)$

$g'(0) = 2 \cdot 0 \cdot g(0)$

$\Rightarrow g'(0) = 0$

$\{[g'(x)]^{(n)} = g^{(n+1)}(x)\}$

$\Rightarrow [g'(x)]^{(n)} = [2x \cdot g(x)]^{(n)}$

$\Rightarrow [g(x)]^{(n+1)} = 2[x \cdot g(x)]^{(n)}$

$= 2\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} \cdot g^{(n-k)}\right]$

$= 2\left(\underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \underbrace{x^{(0)}}_{x} \cdot g^{(n)} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} \underbrace{x^{(1)}}_{1} g^{(n-1)}\right)$

$= 2\left(x \cdot g^{(n)}(x) + n \cdot g^{(n-1)}(x)\right)$

P1) MA1001 - 2012 (P1 b)

Demuestre usando la definición.

I) $\lim_{x \to \infty} x^3 = +\infty$

Recordemos $\forall M>0, \exists m>0, \forall x \geq m, f(x) = x^3 \geq M$

Lo que no entrego

$f(x) = x^3 \leq M \quad / \sqrt[3]{\ }$

$\Rightarrow \quad x \leq \sqrt[3]{M} \rightarrow$ relación directa con x

$\Rightarrow$ Si $\quad m = \sqrt[3]{M}$

Lo que entrego

En efecto dado la definición basta tomar $\underbrace{m = \sqrt[3]{M}}_{\text{Existe } \forall M}$, $M>0$

Luego esto queda $\forall x \geq \sqrt[3]{M}$

$x^3 \geq (\sqrt[3]{M})^3 = M$

$\Leftrightarrow f(x) \geq M$ ■

II) Demostrar $\lim_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \nexists$

Sabemos que si el Límite existe es único

Sea $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad x_n \rightarrow 0^+$

$v_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad v_n \rightarrow 0^+$

Luego $\lim_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{1/2n\pi}\right) = \lim_{x \to 0^+} \sin\left(1/1/(2n\pi + \pi/2)\right)$

cambia porque tiende

$\lim_{n \to \infty} \sin(2n\pi) = 0 \overset{?}{=} \lim_{n \to \infty} (2n\pi + \pi/2) = 1 \quad$ ✗ $\quad \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Scanned with CamScanner

Aux 2016 - 5 ...

III) $\lim_{x \to 8} \frac{x-6}{2} = 1$

Lo primero es anotar la definición particularizado al caso que tenemos como $x \to 8$ y $\lim f(x) = 1$ es acotada en su límite y tendencia

Por lo que debemos usar ε-δ

$$\lim_{x \to 8} \frac{x-6}{2} = 1 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \overbrace{|x-8| < \delta}^{p} \Rightarrow \overbrace{\left|\frac{x-6}{2} - 1\right| < \varepsilon}^{q}$$

\# Demostraremos a través de encontrar la existencia de δ para cumplir con la condición de ε arbitrario.

\# Tomaremos un lado de la implicancia y llegaremos al otro, este desarrollo debe ser a través de equivalencias. $(p \Rightarrow q) \iff$ hipótesis $\Rightarrow$ tesis

\# Estudiaremos $q \iff \left|\frac{x-6}{2} - 1\right| < \varepsilon$

$$\iff \left|\frac{x-8}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\iff \frac{|x-8|}{|2|} < \varepsilon \iff \underbrace{|x-8| < 2\varepsilon}_{\text{tengo la hipótesis.}}$$

\# El paso más importante.

Lo que tengo $|x-8| < \delta$

Lo que quiero llegar $|x-8| < 2\varepsilon$

Así basta tomar $\delta = 2\varepsilon$ para tener lo pedido

IV) PDQ !! $\left[\lim_{x\to 1}(2x^2-1)=1\right] \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\ |x-1|<\delta \Rightarrow |2x^2-1-1|<\varepsilon$

Tenemos $|x-1|<\delta \Rightarrow |2x^2-2|<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow 2|x+1||x-1|<\varepsilon$$

En este caso tenemos parcialmente la hipótesis $|x-1|<\delta$, pero no puede depender δ de x ni de nada.

\# Supongamos $|x-1|<1$ → arbitrario!!

$$\Leftrightarrow -1<x-1<1$$

$$\Leftrightarrow 0<x<2,\quad x\in(0,2)=A,\ \sup_{x\in A} A=2,\ \inf_{x\in A} A=0.$$

→ no vacío y acotado

$$\Leftrightarrow 1<x+1<3,\quad (x+1)\in(1,3)=B,\ \sup_{x\in B} B=3,\ \inf_{x\in B} B=1$$

Esta será una condición adicional que impondré.

luego $2\overbrace{|x+1|}^{\text{a lo más llega a 3, sup.}}|x-1|$

$$\le 2\sup_{x\in B} B\cdot|x-1|$$

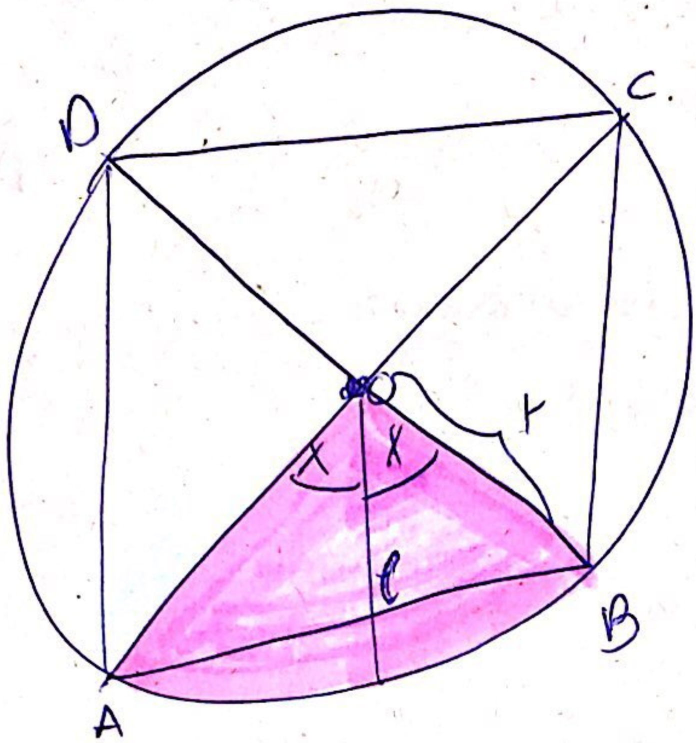
$$=2\cdot 3\,|x-1|<\varepsilon$$

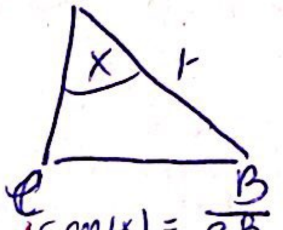
$$\Leftrightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{6}$$

De esta forma tenemos
$|x-1|<\delta$
y queremos tener
$|x-1|<\frac{\varepsilon}{6}$
$\Leftrightarrow |2x^2-2|<\varepsilon$

Para esto basta tomar $\delta=\frac{\varepsilon}{6}$, pero en # supusimos algo, por lo que hay que tomarlo, luego $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{6}\right\}$ Así se cumplen ambos simultáneamente

P2)-





$\operatorname{sen}(x) = \dfrac{\overline{eB}}{r}$

$A' \triangleleft AOB$, fórmula general área sector circular $\frac{1}{2}\theta r^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} r^2(2x) = A \triangleleft AOB$$

$$A' \square ABCD = AB \cdot BC = 4 \operatorname{sen}(x)\cos(x)\, r^2$$

$$AB = 2\overline{eB} = 2\operatorname{sen}(x)\cdot r$$

$$BC = 2\overline{eO} = 2\cos(x)\cdot r$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{A \triangleleft AOB(x)}{A \square ABCD(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} r^2 \cdot 2x}{4\operatorname{sen}(x)\cos(x)\cdot r^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right]} \cdot \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{4} //$$

Scanned with CamScanner

P3| $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(1+e^x)(x^2-4)}$$

a) Primero debemos definir bien el dominio

$e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$0 \neq e^x + 1 > 1, \forall x \in \mathbb{R}$ Así que no causa problema.

$x^2 - 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\Rightarrow A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

Crecimiento: $x_1 < x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(x_1^3 - 2x_1^2)}{(1+e^{x_1})(x_1^2-4)} - \frac{(x_2^3 - 2x_2^2)}{(1+e^{x_2})(x_2^2-4)}$$

Esta parte se omite pues no es lo que busca el ejercicio.

Signos $\frac{x^2(x-2)}{(1+e^x)(x^2-4)}$

	$-\infty$	-2	0	2	∞
x^2	+	+	+	+	
$1+e^x$	+	+	+	+	
$x-2$	-	-	-	+	
$x-2$	-	-	-	+	
$x+2$	-	+	+	+	
	-	+	+	+	

¿QUE OCURRE CON $X=-2,\ X=2$?

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2\cancel{(x-2)}}{(1+e^x)\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2}{(1+e^x)(x+2)}$$

$$= \frac{\cancel{4}}{(1+e^2)\cdot\cancel{4}} = \frac{1}{e^2+1}$$

Como es un punto abierto no es Asíntota vertical.

$$\lim_{x\to -2^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{x^3-2x^2}{(1+e^x)(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{x^2}{(1+e^x)(x+2)} = \pm\infty$$, por como se comporta x^2, $1+e^x$.

$X=-2$ Asíntota vertical.

ii) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x-2)}{(1+e^x)(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{x}{e^x+1}}^{0}\cdot\overbrace{\frac{x^2-2x}{x^2-4}}^{1} = 0$$

$\lim_{x\to\infty} e^x >> \lim_{x\to\infty} x$ | luego $y=0$ es A. H.

$$\lim_{x\to-\infty} \overbrace{\frac{x}{e^x+1}}^{-\infty}\cdot\overbrace{\frac{x^2-2x}{x^2-4}}^{1} = -\infty$$, no es A. H.

iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x+1} \cdot \frac{x^2-2x}{x^2-4} = 1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - mx\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x+1} \cdot \frac{x^2-2x}{x^2-4} - \overbrace{x\,\frac{(e^x+1)(x^2-4)}{(e^x+1)(x^2-4)}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2x^2+(-xe^x-x)(x^2-4)}{(e^x+1)(x^2-4)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^3}-2x^2-x^3e^x+4xe^x-\cancel{x^3}+4x}{(e^x+1)(x^2-4)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x-2x^2}{(e^x+1)(x^2-4)} + \frac{e^x[4x-x^3]}{(e^x+1)(x^2-4)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{4x-2x^2}{(e^x+1)(x^2-4)}}_{\to -2} + \underbrace{\frac{e^x-x\cancel{(x^2-4)}}{(e^x+1)\cancel{(x^2-4)}}}_{\to 0} = -2 = n$$

$y = x-2$ Oblicua.