~~IN~~TRODUCCIÓN AL CÁLCULO.

AXIOMAS E INECUACIONES. Semanas 1 y 2.

AXIOMAS

1) Conmutatividad $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $x+y = y+x$
$\forall x,y \in \mathbb{R}$ $x \cdot y = y \cdot x$

2) Asociatividad $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ $x+(y+z) = (x+y)+z$
$\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$

3) Distributividad $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ $x\cdot(y+z) = x\cdot y + xz$
$\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ $(x+y)\cdot z = xz + yz$

4) Neutro $\forall x \in \mathbb{R}$ $x+e = x$ * Teo: El neutro es único.
$\forall x \in \mathbb{R}$ $x\cdot e = x$

5) Inversos $\forall x \in \mathbb{R}$ $x+(-x) = 0$ *Teo: El inverso es único.
$x \cdot \frac{1}{x} = 1$ El cero no tiene inverso multiplicativo.

6) Tricotomía $\forall x \in \mathbb{R}$ solo una de la sig. proposiciones es verdadera:
i) $x \in \mathbb{R}^*_+$ x positivo
ii) $(-x) \in \mathbb{R}^*_+$ x negativo
iii) $x = 0$ x es cero

7) Clausura $\forall x,y \in \mathbb{R}^*_+$ se cumple: $(x+y) \in \mathbb{R}^*_+$
$(x\cdot y) \in \mathbb{R}^*_+$

PROPIEDADES

1) $\forall a \in \mathbb{R}$ $a\cdot 0 = 0$

2) En los $\mathbb{R}$ las sig ecuaciones tiene solución única.
i) $a+x=b$
ii) $a\cdot x = b$ $(a \neq 0)$

3) Regla de los inversos: i) $\forall a \in \mathbb{R}$ $-(-a) = a$
ii) $\forall a \in \mathbb{R}^*$ $(a^{-1})^{-1} = a$

4) Reglas de los signos: i) $a\cdot(-b) = -(a\cdot b) = -ab$
ii) $(-a)\cdot(-b) = ab$
iii) $-(a+b) = (-a)+(-b) = -a-b$
iv) si $a,b \neq 0 \Rightarrow (a\cdot b)^{-1} = a^{-1}\cdot b^{-1}$.
v) $a-(b+c) = a-b-c$
vi) $a-(b-c) = a-b+c$.

5) $x\cdot y = 0 \Rightarrow (x=0) \vee (y=0)$.

RELACIONES DE ORDEN

1) $x < y \Leftrightarrow (y-x) \in \mathbb{R}^*_+$
2) $x > y \Leftrightarrow y < x \Leftrightarrow (x-y) \in \mathbb{R}^*_+$
3) $x \leq y \Leftrightarrow (x<y) \vee (x=y)$
4) $x \geq y \Leftrightarrow (x>y) \vee (x=y)$.

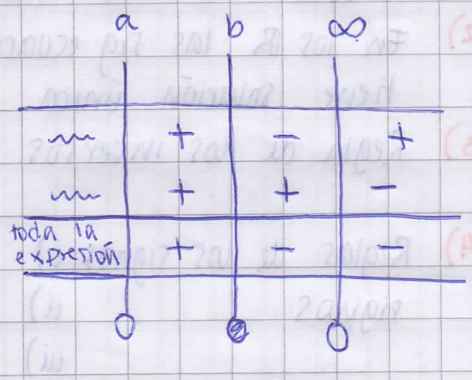
PROPIEDADES DE LA DESIGUALDAD

1) $x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*_+$
2) x es negativo $\Leftrightarrow x < 0$
3) Tricotomía: $(x<y) \underline{\vee} (x>y) \underline{\vee} (x=y)$
4) $(x<y) \wedge (a \in \mathbb{R}) \Rightarrow x+a < y+a$.
5) $(x<y) \wedge (a>0) \Rightarrow ax < ay$
   $(x<y) \wedge (a<0) \Rightarrow ax > ay$.
6) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$
7) Si $(x<y) \wedge (u<v) \Rightarrow (x+u) < (y+v)$
8) Si $(0<x<y) \wedge (0<u<v) \Rightarrow (x \cdot u) < (yv)$
9) $(x<0) \wedge (y>0) \Rightarrow xy < 0$
   $(x<0) \wedge (y<0) \Rightarrow xy > 0$
10) $x>0 \Rightarrow x^{-1} > 0$
    $x<0 \Rightarrow x^{-1} < 0$
11) Si $0 < x < y \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}$.

INECUACIONES

Inecuaciones de grado mayor a uno.

1) Determinar puntos críticos
2) Ordenarlos en intervalos
3) Analizar el polinomio en cada intervalo.
4) Analizar el polinomio en los pts críticos.



Módulo o valor absoluto.

$$x \in \mathbb{R} \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades

1) $|x| \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$
2) $|x| = 0 \iff x = 0$
3) $|x| = |-x|$
4) $|x^2| = |x|^2 = x^2$
5) $-|x| \leq x \leq |x|$
6) $|xy| = |x| \cdot |y|$
7) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
8) $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \iff x \in [-a, a]$
9) $|x| \geq a \iff x \leq -a \ \vee \ a \leq x \iff x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$
10) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x+y| \leq |x| + |y|$

* Desigualdad triangular *

CÓNICAS

Semanas 3 y 4.

CIRCUNFERENCIA

- Centro (a, b)
- $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
- $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$\rightarrow$ centro $\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right)$

$\rightarrow$ radio $\frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$

PARÁBOLA $e = 1$

- $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$
- Vértice: (x_0, y_0)
- Foco: $(x_0, y_0 + p)$
- Directriz: $y = y_0 - p$
- Si $p > 0 \longrightarrow \cup$
- Si $p < 0 \longrightarrow \cap$

ELIPSE $a > b \quad 0 < e < 1$

- $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
- Centro: (x_0, y_0)
- $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
- Focos: $(x_0 \pm a \cdot e, y_0)$
- Directrices: $x = x_0 \pm \frac{a}{e}$

HIPERBOLA $e > 1$

- $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
- Centro: (x_0, y_0)
- $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$
- Focos: $(x_0 \pm a \cdot e, y_0)$
- Asíntotas: $y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$

Distancia de un punto a una recta

$$d = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

recta: $ax + by + c = 0$

pto: (x_0, y_0)

FUNCIONES Semana 5.

- **Paridad**: – Par: $f(-x) = f(x)$ simétrico al eje y.
  – Impar: $f(-x) = -f(x)$ simetría central.
- **Crecimiento**: – Crece: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
  – Decrece: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- **Acotación**: – Inferior: $(\exists a \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \text{Dom } f)\quad a \leq f(x)$
  – Superior: $(\exists b \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \text{Dom } f)\quad f(x) \leq b$
  – Inf-Sup: $(\exists a, b \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \text{Dom } f)\quad a \leq f(x) \leq b$
- **Asíntotas**: – Vertical: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x)=0$.
  – Horizontal: $f(x)^{-1} = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x)=0$.
- **Composición**: – $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
  – $\text{Dom}(g \circ f) = \begin{cases} x \in \text{Dom } f \\ f(x) \in \text{Dom } g \end{cases}$

TRIGONOMETRÍA Semanas 6 y 7.

- $\sin^2 + \cos^2 = 1$
- $\tan^2 + 1 = \sec^2 \quad (\cos \neq 0)$
- $\cot an^2 + 1 = \text{cosec}^2 \quad (\sin \neq 0)$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha$

- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

seno: $f: [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$
$f(x) = \sin x$

arcsin: $f: [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$.
$f(x) = \arcsin x$.

coseno: $f: [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$
$f(x) = \cos x$

arccos: $f: [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$
$f(x) = \arccos x$.

tan: $f: (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$

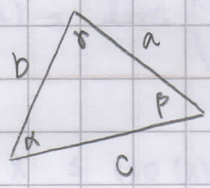
arctan: $f: \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$
$f(x) = \arctan x$

- $\sin(\arcsin(x)) = x \qquad x \in [-1, 1]$
- $\arcsin(\sin(x)) = x \qquad x \in \mathbb{R}$
- $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2} \qquad x \in [-1, 1]$

- $|a| \leq 1$, $\sin(x) = a \Rightarrow x = k\pi + (-1)^k \cdot \arcsin(a)$.
- $|a| \leq 1$, $\cos(x) = a \Rightarrow x = 2k\pi \pm \arccos(a)$
- si $|a| > 1$, no hay solución.
- $\tan(x) = a \Rightarrow x = k\pi + \arctan(a)$.

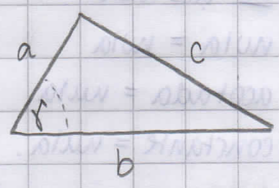
Teo seno

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$



Teo coseno

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma.$$



- $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin(\alpha)$
- $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha)$
- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$
- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$.
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

ACOTAMIENTO

Semana 8.

- **Cotas:**
  - sup: $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in A)$ tal que $x \leq M$
  - inf: $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in A)$ tal que $m \leq x$

  si existe cota, esta NO es única.
- **Máximo:** es la cota sup que pertenece al conjunto $(s \in A)(\forall x \in A)$ tq $x \leq s$.
- **Mínimo:** es la cota inf que pertenece al conjunto $(s \in A)(\forall x \in A)$ tq $s \leq x$.

  Teo: si existe, es ÚNICO.
- **Supremo:** M es supremo, si es la menor cota superior
- **ínfimo:** m es ínfimo, si es la mayor cota inferior.

  $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$

  $\sup(AB) = \sup(A)\cdot\sup(B)$.
- **Axioma del supremo:** Todo conjunto acotado superiormente, y que sea distinto de vacío, posee supremo.
- **Prop. Arquimediana:** $(\forall x > 0)(\exists n \in \mathbb{N})$ tal que $n \cdot x > 1$
- **Densidad de $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{I}$):** $(\forall x, y \in \mathbb{R})(\exists w \in \mathbb{Q}(\mathbb{I}))$ tq $x < w < y$.

$\boxed{\text{también se aplica al ínfimo.}}$

SUCESIONES Semanas 9 y 10.

- **Convergencia:** $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad s_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.
- **Teo:** El límite es único.
- **Límite:** $s_n \to \ell \qquad \lim_{n \to x} s_n = \ell \qquad [s_n \to \ell] \Leftrightarrow [(s_n - \ell) \to 0]$

  $|s_n - \ell| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |(s_n - \ell) - 0| \leq \varepsilon$
- **Teo:** si s_n converge $\Rightarrow$ s_n acotada

  si s_n no acotada $\Rightarrow$ s_n no converge.
  - nula · nula = nula
  - nula · acotada = nula
  - nula · constante = nula.
- **Lema:** si $s_n \to s$ (con $s \neq 0$) $\Rightarrow \dfrac{1}{s_n}$ es acotada.
- **Sandwich:** $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad s_n \leq w_n \leq t_n$

  donde $s_n \to \ell$ y $t_n \to \ell \quad \Rightarrow w_n \to \ell$.
- **Bernoulli I:** $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall h > -1) \quad (1+h)^n \geq 1 + nh$.
- **Bernoulli II:** $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall h > 0) \quad (1+h)^n \geq 1 + nh + \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot h^2$
- **Bernoulli III:** $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall u \in (-1, 1/n)) \quad (1+u)^n \leq \dfrac{1}{1 - nu}$
- **Sucesiones monótonas:**
  - crece: $(\forall n \geq n_0) \quad s_{n+1} \geq s_n$
  - decrece: $(\forall n \geq n_0) \quad s_{n+1} \leq s_n$
- **Teo:** Si s_n es estrictamente creciente (decreciente) y acotada sup (inf), entonces es convergente y $\lim s_n = \sup\{s_n : n \geq n_0\}$ $(\lim s_n = \inf\{s_n : n \geq n_0\})$
- **Euler:** $e = \lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ ✓ creciente ✓ $\frac{1}{n} \to 0$

  ✓ acotada sup ✓ $e \approx 2{,}7182\ldots$
- **Límites importantes**
  - $\dfrac{1}{n} \to 0$
  - $\dfrac{n!}{n^n} \to 0$
  - $\dfrac{a^n}{n!} \to 0 \quad (a \in \mathbb{R})$
  - $\sqrt[n]{a} \to 1$
  - $\sqrt[n]{1/a} \to 1$ $\Big\}\ a \in (0, \infty)$
  - $\sqrt[n]{n} \to 1$
  - $\sqrt[n]{1/n} \to 1$

EXPONENCIAL. Semana 11.

$$\boxed{a_n = (1+h_n)^n}$$

- $[\lim(h_n) = 0 \wedge \lim(n \cdot h_n) = 0] \Rightarrow \lim a_n = 1$
- $[\lim(h_n) = 0$ con $h_n < 0 \wedge \lim({}^1\!/\!n \cdot h_n) = 0] \Rightarrow \lim a_n = 0$
- $[\lim(h_n) = 0$ con $h_n > 0 \wedge \lim({}^1\!/\!n \cdot h_n) = 0] \Rightarrow$ límite <u>no</u> existe.

$$\boxed{\exp(x) = \lim\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$$ $\mathrm{Dom}(\exp) = \mathbb{R}$.

- $1 + x \leq \exp(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$
- $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
- $\lim \exp(-n) = \lim \dfrac{1}{e^n} = 0$
- $\exp(p \cdot x) = (\exp(x))^p$
- $\lim \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \lim \sqrt[n]{e} = 1$
- $0 < \exp(x)$ acot. inf y no tiene ceros.
- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(p)}$
- $\exp\left(\dfrac{x}{q}\right) = \sqrt[q]{\exp(x)}$
- Es estric. creciente e inyectiva
- $\exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ es sobreyectiva

$\Big\}$ biyectiva

$$\boxed{\begin{aligned} \ln &: (0,\infty) \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \ln(x) = \exp^{-1}(x) \end{aligned}}$$

ln es estrictamente creciente
no acotado.

- $(\forall x \in (0,\infty))$ $\exp(\ln(x)) = x$.
- $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\ln(\exp(x)) = x$.
- $\ln(e) = 1$, $\ln(1) = 0$
- $1 - \dfrac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall a \in (0,\infty) \quad a^\alpha = \exp(\alpha \cdot \ln a) \\ &\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

- $\exp(n \cdot \ln(a)) = (\exp(\ln a))^n = a^n$
- $(\exp(x))^\alpha = \exp(\alpha x)$
- $\exp \alpha = e^\alpha$.

- $\forall a > 0 \wedge a \neq 1$ $\to$ $a \in (0,1)$, $\ln a < 0$ a^α estric. decreciente.
  $\to$ $a > 1$, $\ln a > 0$ a^α estric. creciente.

- $(\forall a > 0 \wedge a \neq 1)$ $(a^\alpha : \mathbb{R} \to (0,\infty))$ biyectiva $(\forall y \in (0,\infty))$.
  $x = \dfrac{\ln y}{\ln a}$ satisface $a^\alpha = y$.

Log con base $a>0 \wedge a\neq 1$: $\log_a x = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ $\log_a$ es la inversa de a^x.

Límites exponenciales y logarítmicos

$a_n \to a$ (a_n y a positivos).

- $e^{a_n} \to e^a$
- $\dfrac{e^{a_n} - e^a}{a_n - a} \to e^a$
- si $a_n \to 0 \Rightarrow \exp(a_n) \to 1 \wedge \ln(1+a_n) \to 0$
  - $\to \ln a_n \to a$
  - $\to \dfrac{\ln a_n - \ln a}{a_n - a} \to \dfrac{1}{a}$.
- $\sin a_n \to \sin a$
- $\cos a_n \to \cos a$

LÍMITE DE FUNCIONES.

Semanas 12 y 13.

- **Asíntotas:**
  - Horizontales: $\lim_{x\to\infty^\pm} f(x) = l_1 \Rightarrow y = l_1$.
  - Verticales: $x = x_0 \iff \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$.
  - Oblicuas: $y = mx+n \iff \lim_{x\to\infty^\pm} f(x) - (mx+n) = 0$.

$$m = \lim_{x\to\infty^\pm} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to\infty^\pm} f(x) - mx.$$

- **Caracterización $\varepsilon - \delta$:**

- $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = l \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\ 0<|x-\bar{x}|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$.
- $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \infty \iff (\forall M>0)(\exists \delta>0)\ 0<|x-\bar{x}|<\delta \Rightarrow f(x)>M$.
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = l \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists m>0)\ (\forall x>m)\ |f(x)-l|<\varepsilon$
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \iff (\forall M>0)(\exists m>0)\ (\forall x>m)\ f(x)>M$.

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x) = l$.

Limites importantes: (se pueden deducir con L'Hopital).

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

- $f(x) = e^{1/x}$ $\begin{cases} \bullet \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty^+ \\ \bullet \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0 \\ \bullet \lim_{x\to \infty^\pm} e^{1/x} = 1 \end{cases}$

* La exponencial siempre le gana a un polinomio:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty^+$$

$\boxed{\text{DERIVADAS}}$ Semana 14.

- $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$
- $y = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$

Algunas derivadas:

- $\frac{d}{dx} c = 0$
- $\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1}$ $(n \in \mathbb{R})$
- $\frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$ $(n \in \mathbb{N})$
- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ $(x>0)$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \cdot \tan x$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{cotan} x = -\csc^2 x$
- $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cdot \cot x$
- $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

Álgebra

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(\alpha f)' = \alpha f'$
- $(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $((g \circ f)(x))' = g'(f) \cdot f'$ Regla de la cadena.

Hiperbólicos

- $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow (\sinh(x))' = \cosh x.$
- $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow (\cosh(x))' = \sinh x.$
- $\tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} \Rightarrow (\tanh(x))' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}.$
- $\cosh(x) \pm \sinh(x) = e^{\pm x}$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$

Derivadas de orden superior

- $f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$
- $f^{(n)}(x_0) = f^{(n-1)'}(x_0)$

Taylor

- $p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_k(x - x_0)^k$
- $T_f(x_0) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$

Leibnitz

- $(fg)^n(a) = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} f^k(a) \cdot g^{(n-k)}(a) \right)$

L'Hopital

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

- Si $\lim f(x) \longrightarrow \frac{0}{0} \vee \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ se calcula $\lim \frac{p'(x)}{q'(x)}$

$\boxed{\text{No se calcula } \lim f'(x).}$