MA1002-5 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Álvaro Hernandez
Auxiliar: Luciano Avegno Cepeda

Auxiliar 3: Derivadas

Definición 1. *Diremos que $f : (a, b) \to \mathrm{R}$ es derivable en el punto $\bar{x} \in (a, b)$ si existe el límite:*

$$lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

Este límite se denota como $f`(\bar{x})$ o bien $\frac{df}{dx}\bar{x}$ y se llama derivada de f en $\bar{x}$.

Teorema 1. *Sea $f : (a, b) \to (c, d)$ derivable en $\bar{x} \in (a, b)$ y $g : (c, d) \to \mathrm{R}$ derivable en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c, d)$, así $g \circ f$ es derivable en $\bar{x}$ con:*

$$(g \circ f)`(\bar{x}) = g`(f(\bar{x})) \cdot f`(\bar{x})$$

Teorema 2. *Sea $f : (a, b) \to (c, d)$ biyectiva y continua, Si f es diferenciable en $\bar{x} \in (a, b)$ con $f`(\bar{x} \neq 0)$, entonces la función inversa $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ es derivable en $\bar{y} = f(\bar{x})$ con:*

$$(f^{-1})(\bar{y}) = \frac{1}{f`(\bar{x})} = \frac{1}{f`(f^{-1}(\bar{y}))}$$

1. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable y satisface que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, calcule:

$$lim_{\delta\to 0}(\frac{f(x+\delta)}{f(x)})^{\frac{1}{\delta}}$$

   Indicación: piense exponencialmete o logarítmicamente.

2. Considere las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables y que satisfacen las siguientes proposiciones:

   - $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = xf(x) + 1$
   - $\forall x, y \in \mathbb{R}, g(x + y) = g(x)g(y)$
   - $f(0) = 1$

   Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = g(x)$ y además demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$g(x) = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$$