MA1002-5 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Álvaro Hernández
Auxiliar: Luciano Avegno Cepeda

Resumen Control 1

Definición 1 (Subsuceción)**.** *Sea s_n una sucesión, sea $\varphi : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ una función estríctamente creciente. Se llama subsuceción de s_n generada por ϕ a la sucesión u_n definidad por:*

$$u_n = s_{\varphi(n)}$$

Teorema 1. *Sea s_n una sucesión y sea $l \in \mathrm{R}$, entonces:*

$s_n \to l \iff$ *todas las subseciones de* s_n *convergen a* l

Teorema 2 (Bolszano-Weierstrass)**.** *Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.*

$$s_n \to \bar{x} \Rightarrow f(s_n) \to f(\bar{x})$$

Definición 2 (Función Continua)**.** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \bar{x} \in A$, diremos que f es continua. De forma no DIM, una función continua es aquella que al graficarla no debes levantar el lápiz para dibujarla*

Definición 3 (Función Continua en un Punto)**.** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Diremos que f es una función continua en $\bar{x}$ si:*

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \bar{x} \Longrightarrow f(x_n) \to f(\bar{x})$$

Teorema 3 (Álgebra de funciones continuas)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Las siguientes funciones resultan ser continuas en $\bar{x}$:*

- $f + g$
- $f - g$
- λf, *con* $\lambda \in \mathrm{R}$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$ *cuando* $g(\bar{x}) \neq 0$

Teorema 4 (Composición de Funciones Continuas)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones. Si f es continua en $\bar{x} \in A$ y g es continua en $f(\bar{x}) \in B$, entonces la función $g \circ f$ es continua en $\bar{x}$*

Teorema 5 (Caracterización $\epsilon - \delta$)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Y $\bar{x} \in A$. f es continua en $\bar{x}$ si y solo si se cumple que:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, |x - \bar{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$$

Teorema 6 (Valor Intermedio)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe un $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$*

Teorema 7. *Sea $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ una función continua, si $c, d \in f([a, b])$ entonces para todo número e comprendido entre c y d, existe $x \in [a, b]$, tal que $f(x) = e$*

Teorema 8 (Teorema de Weierstrass)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.*

Teorema 9. *Sea $f : I \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ continua y estrictamente monótona con I un intervalo, entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.*

Definición 4. *La función $f : A \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ se dice uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que:*

$$(\forall x, y \in A) |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Teorema 10. *Sea $f : A \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua si y solo si es continua en todo punto $\bar{x} \in A$*

Definición 5. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diremos que f es derivable o diferenciable en $x_0 \in IntA$ si y solo si el siguiente límite existe:*

$$lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

En tal caso, el valor del límite se denominará derivada de f en x_0 y se denotará por $f'(x_0)$.

Definición 6. *Diremos que $f : (a,b) \to \mathrm{R}$ es derivable en el punto $\bar{x} \in (a,b)$ si existe el límite:*

$$lim_{x\to\bar{x}}\frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}}$$

Este límite se denota como $f`(\bar{x})$ o bien $\frac{df}{dx}\bar{x}$ y se llama derivada de f en $\bar{x}$.

Teorema 11. *Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ derivable en $\bar{x} \in (a,b)$ y $g : (c,d) \to \mathrm{R}$ derivable en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c,d)$, así $g \circ f$ es derivable en $\bar{x}$ con:*

$$(g\circ f)`(\bar{x}) = g`(f(\bar{x}))\cdot f`(\bar{x})$$

Teorema 12. *Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ biyectiva y continua, Si f es diferenciable en $\bar{x} \in (a,b)$ con $f`(\bar{x} \neq 0)$, entonces la función inversa $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ es derivable en $\bar{y} = f(\bar{x})$ con:*

$$(f^{-1})(\bar{y}) = \frac{1}{f`(\bar{x})} = \frac{1}{f`(f^{-1}(\bar{y}))}$$

Teorema 13. *Si $\bar{x} \in (a,b)$ es mínimo local o máximo locas de una función derivable $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(\bar{x}) = 0$*

Teorema 14 (Valor Medio)**.** *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces, exste $\varepsilon \in (a,b)$ tal que:*

$$[f(b)-f(a)]g'(\varepsilon) = [g(b)-g(a)]f'(\varepsilon)$$

Teorema 15 (Regla de L'Hopital)**.** *Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en (a,b), tales que:*

$$lim_{x\to a^+}f(x) = lim_{x\to a^+}g(x) = L$$

con $L = 0$ o $L = \infty$ y $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$ entonces:

$$lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Siempre que este último límite exista

Teorema 16. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$, entonces f es creciente en $[a,b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonía es igualmente estricta.*

Teorema 17. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces f es convexa en $[a,b]$ si y solo si f' es creciente en (a,b)*

Ejemplo 1 (Derivadas Conocidas)**.**

$$(k)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(ax^n)' = nax^{n-1}$$

$$(ln(x))' = \frac{x'}{x} = \frac{1}{x}$$

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\alpha^x)' = ln(\alpha)\alpha^x x' = ln(\alpha)\alpha^x$$

$$(log_\alpha(x))' = \frac{1}{ln(\alpha)x}$$

$$(sen(x))' = cos(x)$$

$$(cos(x))' = -sen(x)$$

$$(tan(x))' = sec^2(x)$$

$$(sec(x))' = sec(x)tan(x)$$

$$(cot(x))' = -cosec^2(x)$$

$$(cosec(x))' = -cosec(x)cot(x)$$

$$(arcsen(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

Teorema 18 (Álgebra de Derivadas)**.** *Si f, g son diferenciables en x_0 y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces las sisguiente operaciones son diferenciables y tienen como resultado:*

- $(f \pm g)' = f \pm g'$

- $(\alpha f)' = \alpha f'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Teorema 19. *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y sea* $x_0 \in Int(A)$. *La función* f *es diferenciable en* x_0 *si y solo si una constante real* m *y una función* $E : [-\delta, 0) \cup (0, \delta] \to \mathbb{R}$ *con* $\delta > 0$ *y* $lim_{h\to 0} E(h) = 0$ *tales que:*

$$f(x_0+h) = f(x_0)+mh+hE(h), \forall h \in [-\delta, 0)\cup(0, \delta]$$

Teorema 20 (Regla de la Cadena)**.** *Si* f *y* g *son funciones diferenciables entonces la regla de la cadena expresa la derivada de la composición* $f \circ g$ *en términos de la derivada de* f *y* g *el producto de funciones como:*

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

Teorema 21. *Sea* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, *k-veces derivable en* $\bar{x} \in (a, b)$ *y sea:*

$$T_f^k(h) := f(\bar{x})+f'(\bar{x})h+\frac{f''(\bar{x})}{2}h^2+\cdots+\frac{f^{[k]}(\bar{x})}{k!}h^k$$

su dearrollo de Taylor de orden k *en torno a* $\bar{x}$. *Entonces:*

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + o((x - \bar{x})^k)$$

Con $lim_{h\to 0} o\frac{h^k}{h^k} = 0$

Teorema 22 (Fórmula de Taylor)**.** *Sea* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(k+1)$*-veces derivable en todo punto del intervalo* (a, b). *Sea* $T_f^k(\cdot)$ *el polinomio de Taylor de orden* k *en* $\bar{x} \in (a, b)$. *Entonces, para todo* $x > \bar{x}$ *existe* $\xi \in (\bar{x}, x)$ *tal que:*

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x - \bar{x})^{k+1}$$