Guía de Problemas Semana 2

P1.

Sea $f : [a, b] \rightarrow R$ una función continua en $[a, b]$.

1) Pruebe que existen $\underline{x}$, $x \in [a, b]$ tales que:

$$f(\underline{x}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(x), \ \forall\, x_1, x_2 \ \in [a, b]$$

2) Demuestre que dados $x_1, x_2 \in [a, b]$ cualqes quiera existe $\beta \in [a, b]$ tal que:

$$f(\beta) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Solución:

1) Como f es continua en su dominio, en virtud del teorema de Weierstrass (página 14 del apunte) alcanza su máximo y su mínimo en [a,b], a los que llamaremos x y $\underline{x}$, respectivamente.
Es claro que:

$$f(\underline{x}) \ \leq \ f(x_1) \ \leq \ f(x)$$
$$f(\underline{x}) \ \leq \ f(x_2) \ \leq \ f(x)$$
$$\text{para } x_1 \text{ , } x_2 \text{ cualesquiera en } [a, b]$$

Y luego sumando desigualdades:

$$2f(\underline{x}) \ \leq \ f(x_1) \ + f(x_2) \ \leq \ 2f(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad f(\underline{x}) \ \leq \ \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \ \leq f(x)$$

2) Dado que f es continua en su dominio y que $\frac{f(x_1) \ + \ f(x_2)}{2}$ está entre el máximo y mínimo de la función (por la parte a), por el teorema de los valores intermedios (página 14), existe β tal que $f(\beta) \ = \ \frac{f(x_1) \ + \ f(x_2)}{2}$

P2.

Dado $a > 0$, sea $f : [0, 2a] \rightarrow R$ continua y tal que $f(0) = f(2a)$. Pruebe que $\exists \ x \in [0, a]$ tal que $f(x) = f(x + a)$.

Solución:

Sea g una funcion tal que g : [0, a] → R definida g(x) = f(x) - f(x+a). Podemos notar que esta funcion es claramente continua por algebra de funciones continuas y f es continua por enunciado. Podemos apreciar que:

$$g(0) = f(0) - f(a)$$
$$g(a) = f(a) - f(2a) = f(a) - f(0) \quad \text{(por enunciado } f(0) = f(2a)\text{)}$$

Vemos entonces que

$$g(0)g(a) = -(f(0) - f(a))^2 \leq 0$$

Ahora aplicando TVI (que se encuentra desde la pagina 12 a la 14 del apunte) tenemos que existe un $\bar{x} \in [0, a]$ tal que

$$g(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{x} + a)$$

Con esto tenemos demostrado lo pedido.

P3.

Definimos la función en R :

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. Verifique que tanh es continua en todo R, que $\tanh(0) = 0$ y que satisface $-1 < \tanh(x) < 1, \ \forall x \ \in R.$
2. Pruebe que si $n \rightarrow \infty$ entonces $\tanh(n) \rightarrow 1$ y que $\tanh(-n) \rightarrow -1$
3. Usando el Teorema del Valor Intermedio, demuestre que $\forall y \ \in \ (-1, 1), \exists x \in R$ tal que $\tanh(x) = y.$
   Indicación: analice separademente los casos $y > 0, \ y = 0, \ y < 0$.
4. Demuestre que la ecuación $\tanh(x) = \cos(x)$ tiene infinitas soluciones en R.

Solución:

1) Dado que e^{x} es continua en todo R, por álgebra de funciones continuas, tanh(x) es continua en R.
En efecto $\tanh(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{e^0 + e^{-0}} \ = \frac{0}{2} \ = 0.$
Además:

$$-1 \ = \ - \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \ = \frac{-e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \ \leq \ \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \ = \ \tanh(x) \ \leq \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \ = \ 1$$

donde además se cumple que $\tanh(x) \neq 1$ y $\tanh(x) \neq -1$, y por lo tanto se tiene el siguiente acotamiento: $-1 < \ \tanh(x) < 1$

2) Tomando x = n, notar que $\lim_{x \rightarrow \infty} \ \tanh(x)$ es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, y por álgebra de límites:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 \qquad (1)$$

Analogamente se puede obtener $\lim_{x \rightarrow \infty} \ \tanh(x) \ = -1$.

3) Definamos la función auxiliar $g(x) \ = \tanh(x) - y$ y sea $x > 0$, $\underline{x} < 0$

$$g(x)g(\underline{x}) \ = \ (\tanh(x) - y) \, (\tanh(\underline{x}) \ - y) \qquad (2)$$

donde $\tanh(x) > 0$ y $\tanh(\underline{x}) < 0$.
Siguiendo la indicación, veamos ambos casos por separado:
Si $-1 < y < 0 \ \Rightarrow \ \tanh(x) - y > 0, \ \forall x > 0$
Si $-1 < y < 0 \ \Rightarrow \tanh(\underline{x}) - y < 0$ para algún x, pues $\lim_{x \rightarrow \infty} \ \tanh(x) \ = 1$, $\exists \ x > 0$, $\tanh(x) > y$.

Si $0 < y < 1 \ \Rightarrow \ \tanh(x) - y > 0$, pues $\lim_{x \rightarrow \infty} \ \tanh(x) \ = 1$, $\exists \ \underline{x} > 0$, $\tanh(\underline{x}) < -y$.
Si $0 < y < 1 \ \Rightarrow \tanh(\underline{x}) - y < 0, \quad \forall \ \underline{x} < 0$

Para y = 0, $\tanh(x) - y > 0, \ \forall x > 0$ y $\tanh(\underline{x}) - y < 0, \forall \ \underline{x} < 0$
Notamos que, en todos los casos, $\exists \ x, \ \underline{x}$ tal que la función cambia de signo, luego por el T.V.I, $\forall y, \exists x$ tal que $g(x) = 0 \ \Rightarrow \ \tanh(x) - y = 0 \ \Rightarrow \ \tanh(x) = y$.

4) Sea f(x) = tanh(x)−cos(x) una función continua por álgebra de funciones continuas. Demostraremos que f(x) tiene infinitos ceros. La idea es: la función tanh(x) siempre está entre 1 y (−1) sin tomar estos dos valores, y la función cos(x) toma ambos valores ya que es periodica, de modo que la función f(x) constantemente cambia de signo, ya que estamos seguros de que cuando el coseno vale 1, cos(x)>tanh(x) y cuando toma el valor de -1, cos(x)<tanh(x). Buscaremos entonces esos cambios de signo.
Se observa que en $[k\pi,(k + 1)\pi]$, $k \in Z$ siempre ocurre que:

$$(\cos(k\pi) \ = \ 1 \ \wedge \ \cos((k \ + \ 1)\pi) \ = \ -1) \vee (\cos(k\pi) \ = \ -1 \ \wedge \ \cos((k \ + \ 1)\pi) \ = \ 1)$$

Como -1< tanh(x)<1 se tiene que:

$$(f(k\pi) \ < \ 0 \ \wedge \ f((k \ + \ 1)\pi) \ > \ 0) \ \vee \ (f(k\pi) \ > \ 0 \ \wedge \ f((k \ + \ 1)\pi) \ < \ 0)$$

En ambos casos se tendrá que f(kπ)*f((k+1)π)≤0, y usando la continuidad de f(x) con el TVI concluimos que existe $x_0 \in [k\pi, (k+1)\pi]$ tal que:

$$f(x_0) \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ \tanh(x_0) \ = \ \cos(x_0)$$

Ahora que sabemos que x_0 es solucion de la ecuación y hay infinitos intervalos entre [kπ, (k+1)π] distintos entre si, se podra decir que tiene infinitas soluciones.

P4.

Un monje vive en un monasterio a los pies de una montaña. El día 7 de cada mes a las 00:00 hrs., el monje comienza una caminata de 34 horas hasta la cumbre de la montaña. Una vez, ahí medita durante 6 horas y luego baja la montaña de vuelta al monasterio. La bajada le toma 1 hora. Demuestre que existen dos instantes, uno en el día 7 y otro en el día 8, en los que el monje se encuentra a la misma distancia del monasterio a la misma hora del día.

Solución:

Para esto definimos la funcion:

m : [0,48] → R
x → m(x)

Donde m(x) sera la distancia del monje al monasterio. Claramente su cambio de distancia seguira una curva continua, ya que el monje no puede teletransportarse. como el monje va a volver al monasterio m(0) = m (48) = 0

Entonces debemos demostrar que existe un $x \ \in$ [0,24] tal que: m(x) = m (x + 24), osea, un instante esta en el día 7 y el otro en el día 8 a la misma distancia, que es lo que se pide.

PDQ: m(x) = m(x + 24) ⇒ m(x) - m(x + 24) = 0

Para esto definiremos una funcion auxiliar, que denominaremos F(x)= m(x) - m(x + 24)

La funcion F claramente es continua, por algebra de continuas (resta de continuas sigue siendo continua)
Al evaluar:
F(0) = m(24) - m(0)
F(24) = m(48) - m(24)   Pero sabemos que m(48) = 0.

Entonces, se cumple que:
F(24) = m(0) - m(24) y F(24)= - F(0)

Por lo tanto:
$F(0)F(24)= -[m(24) - m(0)]^2 < 0$

Por teorema del valor intermedio se cumple que:
∃ x barra tq F(x)=0 ⇒ m(x + 24)=m(x)

Entonces, en efecto existe un instante en el que el monje va a estar un instante en el dia 7 y otro al dia 8 a la misma distancia.

P5.

Un conductor demora 5 horas en recorrer los (aproximadamente) 500 kms. que separan Santiago y Concepción. Pruebe que existe un tramo del viaje, de una longitud de 100 kms., que es recorrido en exactamente 1 hora.

Solución:

Primero, definimos una función $f : [0, 5] \rightarrow [0, 500]$ que representa los kilometros recorridos en función de las horas, y asumimos que es continua, teniendo en cuenta que el movimiento de un auto es continuo y no es posible que existan casos que no cumplan la definición de continuidad. Luego definimos otra función $h : [0, 4] \rightarrow [0, 500]$ como $h(x) = f(x + 1) - f(x)$, es decir, la distancia recorrida en una hora.
Por Teorema de los Valores Intermedios (TVI) $\forall$ "y" $\in \ [0, 500]$, $\exists$ x´ $\in [0, 4]$ tal que h(x´)=y.
Si tomamos y=100, $\exists$ un x tal que h(x)=100
Pero h(x)= 100 es equivalente a:
f(x+1)-f(x)=100
Que representa que lo recorrido en una hora son exactamente 100 kilómetros.

P6.

Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$, $a < b$ y tales que $f(a) \neq \ f(b), \ f(a) = \ -g(b)$ y $f(b) = \ -g(a)$. Demuestre que $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = \ -g(x_0)$ y para $f(x) = (x - a)^n$ y $g(x) = \ -(x - b)^n$ con $n \ \in \ N \setminus \{0\}$, verifique que se cumplen las hipótesis anteriores y calcule, para este caso, el valor de $x_0 \in [a, b]$

Solución:

Sea $h(x) = f(x) + g(x)$ continua (por Teorema de álgebra de funciones continuas),debemos encontrar un cero para la función. Evaluando en el intervalo $[a, b]$ tenemos:

$$h(a) = f(a) + g(a) = f(a) - f(b) \quad \text{y} \quad h(b) = f(b) + g(b) = f(b) - f(a)$$
$$\Rightarrow h(a)h(b) = [(f(a) - f(b)][(f(b) - f(a)] = \ -[f(a) - f(b)]^2 \leqslant 0$$

y por el Teorema del Valor Intermedio $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \ -g(x_0)$
ahora para $f(x) = (x - a)^n$ y para $g(x) = \ -(x - b)^n$ tenemos:

$$f(a) = (a - a)^n = 0 \quad \text{y} \quad -g(b) = (b - b)^n = 0$$
$$f(b) = (b - a)^n \quad \text{y} \quad -g(a) = (a - b)^n$$

Claramente nos podemos dar cuenta que $f(a) = \ -g(b)$ cumple la hipótesis anterior, pero por otro lado no se cumple $f(b) = \ -g(a) \ \ \forall n$, ya que si n es impar llegamos a que $f(b) \neq \ -g(a)$ por signos, llegando a una contradicción, a su vez si n es par llegamos a que a=b, contradiciendo el enunciado.

P7.

1. Sea $g : R \ \rightarrow R$ continua en un punto $x_0 \in R$ tal que $g(x_0) > 0$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0$ para todo $x \ \in (x_0 - \delta, \ x_0 + \delta)$.
2. Considere F y G contninuas en x_0 y tales que $F(x_0) < G(x_0)$. Demuestre que $\exists\delta > 0$ tal que $\forall \ x \ \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \ F(x) < G(x)$.

Solución:

1) Sabemos que g es continua en x_0 y que $g(x_0) > 0$ y tenemos que demostrar que existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Ahora analizamos la caracterización $\varepsilon - \delta$ para nuestra función
$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ | x - x_0 | < \delta \Rightarrow \ | g(x) - g(x_0) | < \varepsilon$

Esto mismo lo podemos reeescribir la última desigualdad de la siguiente forma
$| g(x) - g(x_0) | < \varepsilon \Leftrightarrow g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon$
Para esto basta tomar $\varepsilon = g(x_0)$, lo cual es posible, por el hecho de que sabemos que $g(x_0) > 0$, de este modo, la desigualdad nos quedaría de la siguiente forma:

$0 < g(x) < 2g(x_0)$

Por lo tanto, podemos notar que con $\varepsilon = g(x_0)$ se cumple que $\exists\delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ g(x)>0$.

2) Tenemos que demostrar que $\exists\delta > 0 \ \forall x \in \ (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ F(x) < G(x)
Primero sabemos que F y G son funciones continuas en x_0 , notemos que F(x) < G(x) ⇒ 0 < G(x) - F(x) entonces, definimos la función
H(x) = G(x) - F(x) y por álgebra de funciones continuas H también es continua.
Por enunciado $0 < G(x_0) - F(x_0) = H(x_0)$
Entonces utilizando caracterización de $\varepsilon - \delta$ tenemos lo siguiente

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ | x - x_0 | < \delta \Rightarrow \ | H(x) - H(x_0) | \ < \varepsilon$$

Para esto tomamos un $\varepsilon = H(x_0)$ de este modo se cumple la implicancia pues tenemos lo siguiente (análogo a la parte a)):
$| H(x) - H(x_0) | < \varepsilon \Leftrightarrow H(x_0) - \varepsilon < H(x) < H(x_0) + \varepsilon$, tomamos $\varepsilon = H(x_0)$ pues sabemos que $0 < H(x_0)$ nos queda $0 < H(x) < 2H(x_0)$. Reemplazando H(x) = G(x) - F(x) tenemos lo siguiente:

$$0 < G(x) - F(x) \Rightarrow \ F(x) < G(x)$$

Que es la desigualdad a la que queríamos llegar. por lo tanto $\exists\delta > 0 : \forall x \in \ (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ F(x) < G(x)

P8.

Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función continua. Demuestre que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$.
Indicación: Considere $g(x) = f(x) - x$.

Solución:

Por demostrar que $f(x) = x \ \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

Sea $g(x) = f(x) - x$, se sabe que $g(x)$ es continua dada la álgebra de funciones continuas ya que $f(x)$ y x son continuas y suma de funciones continuas es otra función continua, tambien sabemos que $\text{Dom } g \ = \ [a. b]$ dado que

$$\begin{cases} \forall x \in \text{Dom } f = [a. b] \\ \forall x \in \text{Dom } x \ = \ R \end{cases} \quad \Rightarrow \ \forall x \in \text{Dom } g = [a, b]$$

Cabe recalcar que $h(x) = x$, osea, la función identidad

Dado que $g(x)$ es continua y su dominio es acotado con intervalo cerrado, podemos utilizar el Teorema de valores intermedios

$$\Rightarrow \exists \ x \in \text{Dom } g \, | \, g(x) = f(x) - x = 0 \ \Rightarrow \ f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$$