Guía de Ejercicios Semana 2

Problema 1.

Pruebe el Teorema de Weierstrass en su versión para máximo. Es decir, dada $f:[a,b] \to R$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su máximo en $[a,b]$.

Solución:

Queremos demostrar que existe un $x_o \in [a,b]$ tal que $f(x_o) \geqslant f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

Entonces sea m = sup{f(x) : x ∈ [a,b]}
Como f es continuna se cumple lo siguiente:
$(\forall X_n \in [a,b])\ (X_n \to x_o \Rightarrow f(X_n) \to f(x_o))\ (\forall x_o \in [a,b])$
Ahora consideremos una sucesión que converga a m es decir $X_n \to m$ y según el teorema de Bolzano - Weierstrass existe al menos una subsucesión que es convergente a m analisémoslo de esta forma como $X_n \to x_o \Rightarrow f(X_n) \to f(x_o)$ donde $f(x_o) = m$. Podemos decir que m no es un término que se va al infinito por el hecho de que existe un elemento en el dominio que alcanza dicho valor, por lo tanto, pudimos probar la existencia de un máximo $m \geqslant f(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

Problema 2.

Probar las propiedades de la función arctan

Solución:
Partimos de la base de que la función $x \mapsto \tan(x)$ no es biyectiva, pero su restricción al intervalo $(-\pi/2,\ \pi/2)$ es continua y estrictamente creciente con recorrido $\mathrm{Rec}(\tan) = R$, lo que $\Rightarrow$ posee una inversa tambien continua denotada $R \mapsto (-\pi/2,\ \pi/2)$, que es impar, creciente, $\arctan(0) = 0$ y que $-\pi/2 < \arctan(x) < \pi/2$, $\forall x \in R$.

1- Por demostrar que la inversa de tg (arctg) es continua.
Tenemos que arctg es la inversa de tg la cual es continua y estrictamente monotona dado que es estrictamente creciente, todo esto en el intervalo $(-\pi/2,\ \pi/2)$ llamado "I", diremos que "J" $= f(I)$ es un intervalo correspondiente Codom tg = (R) por virtud del teorema 2.4 del apunte se cumple que la inversa de tg (arctg) es también continua.

2- Para demostrar que arctg es impar, usaremos la definición. Para esto debe cumplir 2 condiciones, la primera que $\forall x \in \mathrm{Dom\ arctg}$, $-x$ tambien $\in \mathrm{Dom(arctg)}$ lo que dado el $\mathrm{Dom\ arctg} = R$ claramente se cumple puesto los reales son un cuerpo ordenado completo arquimediano, por último solo resta demostrar que $\forall x \in \mathrm{Dom\ arctg}$ x se cumple:
$-f(x)= f(-x)$ por lo tanto basta tomar un X aleatorio en el dom de la funcion y ver si se cumple donde para $-f(x) = -\mathrm{arctg}(x) = \mathrm{arctg}(-x) = f(-x)$
Supongamos un $x_o \in \mathrm{Dom(arctg)}$ y $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\mathrm{arctg}(-x_0) = a \Leftrightarrow -x_0 = \mathrm{tg}(a) \Leftrightarrow x_0 = -\frac{\sin(a)}{\cos(a)} \underset{\substack{\text{cos par,}\\ \text{sin impar}}}{\Leftrightarrow} x_0 = \frac{\sin(-a)}{\cos(-a)}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = \mathrm{tg}(-a) \Leftrightarrow \mathrm{arctg}(x_0) = -a \Leftrightarrow a = -\mathrm{arctg}(x_0)$$

Por transitividad y como x_0 arbitrario, concluimos que $\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}(x)$

3- pdq es creciente, lo que se cumple dado tan es creciente y por teorema: Si $f: A \to R$ es una función estrictamente creciente, entonces $f^{-1}: f(A) \to R$ también es estrictamente creciente. Si f es estrictamente decreciente, f^{-1} también lo es por lo que se concluye arctan es creciente, ademas basta con realizar y mirar la gráfica de esta funcion.

Supongamos que arctan es creciente y tratemos de llegar a una verdad,

$$\text{arctan es creciente} \Leftrightarrow \arctan(x+1) > \arctan(x) \underset{\substack{\text{tan creciente,}\\ \text{se mantiene}\\ \text{la desigualdad}}}{\Leftrightarrow} \tan(\arctan(x+1)) > \tan(\arctan(x))$$
$$\Leftrightarrow x+1 > x \Leftrightarrow V$$

Por transitividad, concluimos que arctan es creciente

4-pdq $\arctan(0) = 0$,por lo que partiendo por tg(0)=0 al aplicar arctan en ambos lados de la igualdad queda: arctan(tan0)=arctan(0) $\Leftrightarrow$ 0= arctan(0)
5- pdq: $-\pi/2 < \arctan(x) < \pi/2$, $\forall x \in R$ se sabe que el codom de arctan(x) es $(-\pi/2,\ \pi/2)$ por lo que sus imagenes estan acotadas superiormente por el sup(arctan)= $\pi/2$ y el inf(arctan)= $-\pi/2$ y dado que no existe maximo ni minimo por definicion de supremo e infimo se tiene que : $-\pi/2 < \arctan(x) < \pi/2$ trivial.

Problema 3.

Pruebe que si $f: I \subset R \to R$ es cotinua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo.

Solución:
Se tiene por enunciado que f es continua y monótona estricta asi, se cumple la primera parte de la implicancia.
Si ∃ la inversa de $f \to (f^{-1})$ y se cumple que J es su dominio, f^{-1} es continua, entonces quedará demostrado.
-Sea f continua en x con $X_n \to x$
-Sea $(y) \in J$ ^ $(Y_n) \subseteq J$ tal que $(Y_n) \to (y)$
-PDQ $f^{-1}(Y_n) \to f^{-1}(y)$ (prop. de f continua) lo que demostraria la continuidad de la funcion f^{-1}.
-Ademas diremos que $f^{-1}(y) = x$ y que $f^{-1}(Y_n) = X_n$

Para algún (epsilon) > 0 tal que $x \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, en otras palabras que
$x-\varepsilon \leqq x \leqq x+\varepsilon$
$f(x-\varepsilon) \leqq f(x) \leqq f(x+\varepsilon)$
$f(x-\varepsilon) \leqq Y_n \leqq f(x+\varepsilon)$
$x-\varepsilon \leqq f^{-1}(Y_n) \leqq x+\varepsilon$
$x-\varepsilon \leqq X_n \leqq x+\varepsilon$ / (Sabemos que Xn continua) $X_n \to x$
Luego, f^{-1} es continua y $\in$ J en su dominio, dominio que corresponde a las imagenes de f , es decir, J=f (I) / f^{-1}
f^{-1}(J)*(I) , Asi f (I) puede espresarse en modo intervalo.

Problema 4.

Probar la siguiente variante del teorema, si $f: I \to J$ es estrictamente monótona y biyectiva con I y J intervalos, entonces f y f^{-1} son continuas.

Solución:

Dem:
Definición de monotonía creciente estricta:
Sea $f: I \to J$ función $\mid \forall x, y \in I,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
y
Definición de biyectividad:
$\forall y \in J,\ \exists!\, x \in I \mid f(x) = y$,

Supongamos por contradicción que:
Definición de continuidad negada:
$\exists\, x_n \subseteq I \mid x_n \to x \wedge f(x_n) \not\to f(x)$

Entonces:
Definición del límite negada:
$\Rightarrow \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_{n_0} \in I, 0 < |x_{n_0} - x| < \delta \wedge |f(x_{n_0}) - f(x)| > \epsilon$
$\Rightarrow \exists a \in [x-\delta,\ x+\delta]^* \mid |f(a) - f(x)| > \epsilon$
Sea $b = x - \delta \wedge c = x + \delta$

$\Rightarrow \forall b, c \in I,\ \exists a \in [x-\delta, x+\delta]^* \mid x < a < b \vee c < a < x$
Por Monotonía:
$\Rightarrow \forall b, c \in I,\ (a < b \Rightarrow f(a) < f(b)) \wedge (c < a \Rightarrow f(c) < f(a))$
$\Rightarrow \forall b, c \in I,\ (b < x,\ |f(b) - f(x)| > \epsilon) \vee (x < c,\ |f(c) - f(x)| > \epsilon)$
$\Rightarrow \forall b, c \in I,\ (b < a < x,\ f(b) < x - \epsilon) \vee (x < a < c,\ x + \epsilon < f(c))$
$\Rightarrow \nexists f(b) \in [x-\epsilon,\ x) \vee \nexists f(c) \in (x,\ x+\epsilon]$
Hay un intervalo donde no hay f(x), lo cual contradice que f es biyectiva, ya que por definición $\exists f(x) \in [x-\epsilon, x+\epsilon]^* \subseteq J$.
$\Rightarrow \nexists x_n \subseteq I \mid x_n \to x \wedge f(x_n) \not\to f(x)$
$\Rightarrow \forall x_n \subseteq I \mid x_n \to x \wedge f(x_n) \to f(x)$
$\Rightarrow$ f es continua.
Esto se aplica de forma análoga a la monotonía decreciente estricta.
Dado que f es biyectiva, $f(I) = J$
$\Rightarrow$ En virtud del teorema de continuidad de funciones inversas, f^{-1} es continua. □

Probaremos que f es continua en todo $x \in J$

Sea $x_n \in J$ tal que $x_n \to x$. Sea $y = f^{-1}(x)$ y $y_n = f^{-1}(x_n)$. Debemos probar que $y_n \to y$ por lo que usaremos la defnición de convergencia.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 \in N)(\forall n \geq n_0)\ |y_n - y| \leq \varepsilon \tag{1}$$

Tenemos que $y - \varepsilon < y < y + \varepsilon$, si tomamos a f como una función estrictamente creciente entonces, $f(y-\varepsilon) < x < f(y+\varepsilon)$, por lo tanto ya que $x_n \to x$, $\exists\, n_0 \in N$ tal que $f(y-\varepsilon) < x < f(y+\varepsilon)$, para todo $n \geqslant n_0$. Además como f^{-1} también es creciente $y - \varepsilon < f^{-1}(x_n) < y + \varepsilon$, es decir $y_n \in (y-\varepsilon,\ y+\varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$.

Como f es biyectiva y esctrictamente monótona, esto se cumpliría también cuando f sea estrictamente decreciente y para f^{-1}.

Por todo lo anterior f y f^{-1} son continuas.

Problema 5.

Completar los ejemplos 2.8 y 2.9

Solución:

Explicacion ejemplo 2.8:
Hacemos uso de la caracterización Epsilon-Delta (Teorema 3).

Consideramos un punto (a) perteneciente a los reales de la función f(x)=x^3, donde la función debe ser continua ahí. De tal modo cumpliendo la propiedad 1.2.
Lo que debemos hacer es encontrar un δ >0 que cumpla la desigualdad

Tomando en cuenta ε > 0

Trabajando la desigualdad utilizamos propiedad de módulos y desigualdad triangular (figura 3) encontrando la siguiente equivalencia.

De tal manera tomamos

y cumplimos con la desigualdad propuesta al comienzo.

Explicacion ejemplo 2.9:
Al igual que en la explicación del ejemplo 2.8, utilizaremos la caracterizacion Épsilon - Delta (Este correponde al teorema 3 en este documento y al teormea 1.5 en el apunte)

Consideramos un punto (b) que pertenece a los reales positivos de la funcion f(x)=x^{1/2}, la cual es continua y conserva su continuidad en el punto b. Aquella informacion nos permite darnos cuenta de que se cumplen las caracteristica para que se presente el teorema mencionado al inicio de la explicación.

Entonces, debemos encontrar un delta mayor a cero en donde épsilon sea mayor a cero y se cumpla la siguiente desigualdad:

Teniendo esto presente, podemos trabajar la desigualdad, usando la desigualdad triangular y otras propiedades del valor absoluto. De esa manera, llegamos a que la desigualdad anterior es equivalente a:

Por lo tanto, a partir de lo anterior sabemos que si tomamos

se podra cumplir la desigualdad propuesta al comienzo del ejercicio.

Problema 6.

Encuentre el recorrido de las funciones:

$$f(x) = \ln(2 + \exp(x)) \text{ y } f(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$$

Solución:

1) $f(x) = \ln(2 + \exp(x))$:
Primero, sabemos que la función $\exp(x) > 0\ \forall\, x \in R$, por lo tanto, el argumento del logaritmo natural de la función f(x) siempre será mayor a 2 (equivalente a decir que $\ln(2 + \exp(x)) > \ln(2)$).

Luego, la función $\exp(x)$ es estrictamente creciente, por lo que el argumento de ln de la función en cuestión siempre crecerá, y de acuerdo a esto, como la función logaritmo es estrictamente creciente, es posible decir: $\ln(2 + \exp(x)) \geqslant \ln(2 + \exp(y))$ si $x \geqslant y$, con $x, y \in R$.
Para terminar, se debe tomar en cuenta que la función ln es continua $\forall x \in R$, por lo que finalmente, podemos concluir que el recorrido de la función $f(x) = \ln(2 + \exp(x))$ es: $]\ln(2),\ +\infty[$.

2) $f(x) = \mathrm{sen}\left((x^2 - 1)/(x^2 + 1)\right)$:
Empezaremos diciendo que, al tratarse de la función seno, el recorrido será siempre delimitado por los valores 1 y -1 (1 y -1 son cotas superiores en inferiores de la función seno).
Luego, estudiaremos $f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$. Si nos ponemos en el caso límite de que $x \to +\infty$, entonces $f(x) \to 1$, y si $x \to -\infty$, f(x) tenderá al mismo valor, debido a la potencia cuadrada. El otro caso límite a estudiar, es cuando $x = 0$: en este caso, $f(x) = -1$.
Sigue que, como la función sen(x) es continua $\forall x \in R$, entonces el recorrido de la función que estamos estudiando $f(x) = \mathrm{sen}\left((x^2 - 1)/(x^2 + 1)\right)$ es $[\mathrm{sen}(-1),\ \mathrm{sen}(1)[$, en donde si alcanzará el valor de sen(-1), mas no el de sen(1) pues es solo una tendencia.

Problema 7.

Demuestre que la ecuación $x\,\mathrm{sen}(x) = 2$ posee infinitas soluciones.

Solución:

Sabemos que la función sen es periodica, sin embargo, esta es acotada por 1 y (-1).
Ahora, siguiendo la idea del ejemplo 2.1 del apunte (pág. 12), podemos estudiar la intersección entre las funciones $x \mapsto x\,\mathrm{sen}(x)$ y $x \mapsto 2$, luego sabemos que esta ultima es par, y la primera también lo es:
Sea $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)\,\mathrm{sen}(-x) \quad \text{/ como el seno es impar} \\ &= (-x)(-\mathrm{sen}(x)) \\ &= x\,\mathrm{sen}(x) \\ &= f(x) \\ &\therefore\ x\,\mathrm{sen}(x) \text{ es par.} \end{aligned}$$

Para demostrar la existencia de una solución se puede definir una función $g(x) = x\,\mathrm{sen}(x) - 2$, y una vez tenemos esto aplicar el teorema de valor intermedio para probar la existencia de un x tal que al evaluarlo sea igual 0.
Podemos tomar el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, si evaluamos dentro de la función los valores de los extremos:

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 = \frac{\pi}{2} - 2 < 0 \quad \wedge \quad g\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right) - 2 = \frac{5\pi}{2} - 2 > 0$$

Lo cual nos dice que existe un x perteneciente al intervalo que cumple con que $g(x) = 0$ y eso significa que este x es solución de la ecuación.

Volviendo a la idea de la paridad de la función, si se estudia los signos de la función f descrita antes y solo considerando valores positivos para x, tenemos que f será positiva para los valores de x tales que $x \bmod 2\pi \in\ ]0,\ \pi[$ y negativa si $x \bmod 2\pi \in\ ]\pi,\ 2\pi[$, mientras que la función g cumplira con algo parecido pero desde cierto x_0, por lo que se pueden ir tomando distintos intervalos [a, b] donde la multiplicación de sus imagenes de un numero menor o igual a cero. Entendiendo esto es que se obtiene que la ecuación tiene infinitas soluciones.

Problema 8.

Demostrar que la ecuación $\exp(x)\cos(x) + 1 = 0$ tiene infinitas raíces reales.

Solución:

Se sabe que tanto e^x, cos(x) son continuas en R. Por lo tanto su multiplicación también lo es (Teorema de álgebra de continuas): entonces se concluye que $e^x\cos(x)$ es continua. Y si se le agrega la función h(x) = 1, que es continua por definición, la suma también es continua. Notar que para todo $x=2k\pi$, cos(x) = 1 y para todo $x=(2k+1)\pi$, cos(x)=*-1; $k \in N^*$. Lo que significa que para los intervalos $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ existe un cambio de signo. Entoces $e^x\cos(x)+1$ tiene cambio de signo y en algún punto tiene que pasar por 0, por el teorema del valor intermedio. Concluimos que por Bolsano ∃ x $\in [2k\pi,(2k+1)\pi]$ tal que e^x * cos(x)+1=0

Problema 9.

Si $x^3 - x^2 + x$ demuestre que $\exists x_0 \in R$ tal que $h(x_0) = 10$. Justifique.

Solución:

Tomamos $g: [-100,\ 100] \to R$. con $g(x) = x^3 - x^2 + x - 10$
Por álgebra de funciones continuas, g(x) es continua (Pues es un polinomio)

$$\begin{aligned} &\text{Tomamos } g: [-100,\ 100] \to R. \text{ con } g(x) = x^3 - x^2 + x - 10 \\ &\text{Por álgebra de funciones continuas } g(x) \text{ es continua (Pues es un polinomio)} \\ &\text{Evaluamos en } x = 100 \\ &[g(100) = (100)^3 - (100)^2 + 100 - 10] > 0 \\ &\text{Evaluamos en } x = -100 \\ &[g(-100) = (-100)^3 - (100)^2 - 100 - 10] < 0 \\ &\text{Por teorema de Bolzano} \\ &\exists\, x_0 \in [-100, 100] \text{ tal que} \\ &g(x_0) = {x_0}^3 - {x_0}^2 + x_0 - 10 = 0 \\ &h(x_0) = {x_0}^3 - {x_0}^2 + x_0 = 10 \end{aligned}$$

Problema 10.

Sea $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ un polinomio del grado n, tal que $c_0 c_n < 0$. Demostrar que existe $x_0 \in R$.

Solución:

Sea p(x) un polinomio de grado n tal que $c_0 \cdot c_n < 0$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{x^n} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k}{x^n} + \frac{c_n x^n}{x^n} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k}{x^n} + c_n$$

Notar que $\mathrm{gr}\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k\right) < n$, por lo tanto $\lim_{x \to \infty} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k\right)/x^n\right] = 0$. Entonces se tiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{x^n} = c_n$$

Esto implica que para un x' suficientemente grande p(x') tiene el mismo signo que c_n, entonces se tiene que:

$$p(0) \cdot p(x') = c_0 \cdot p(x') < 0$$

Ya que p(x) es continua en todo R, luego por el Teorema de los Valores Intermedios se tiene que $\exists x_0 \in R, p(x_0) = 0$.