P1) Calcular la siguiente primitiva:

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x)\, dx$$

Vemos que tenemos dos operaciones "primos" x^2 y $\operatorname{sen}(x)$ y como de ambos tienen sus derivadas y antiderivadas conocidas, usamos la integración por partes:

$$u = x^2, \quad du = 2x \quad \Rightarrow$$
$$dv = \operatorname{sen}(x), \quad v = -\cos(x)$$

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x)\, dx = -\cos(x)\, x^2 - \int -\cos(x) \cdot 2x\, dx$$

$$= -\cos(x)\, x^2 - (-2) \int \cos(x)\, x\, dx$$ (integración por partes)

$$u = x, \quad du = 1$$
$$dv = \cos(x), \quad v = \operatorname{sen}(x)$$

$$= -\cos(x) x^2 + 2 \left[x \operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x) \cdot 1\, dx \right]$$

$$= -\cos(x) x^2 + 2 \left[x \operatorname{sen}(x) - \cos(x) + C \right]$$

$$= -x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) - 2\cos(x) + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

P2) Considerando la primitiva:

$$I = \int \frac{dx}{x^2(1+x)}$$

i) Determinar las constantes de A, B, C, D tal que se cumpla:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{2Cx+D}{1+x^2}$$

Entonces, sumando:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{xA+B}{x^2} + \frac{2Cx+D}{1+x^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)(xA+B) + x^2(2Cx+D)}{x^2(1+x^2)}$$

$$= \frac{Ax + B + Ax^3 + Bx^2 + 2Cx^3 + Dx^2}{x^2(1+x^2)}$$

$$= \frac{Ax^3 + 2Cx^3 + B + Bx^2 + Dx^2 + Ax}{x^2(1+x^2)}$$

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{x^3(A+2C) + B + x^2(B+D) + x(A)}{x^2(1+x^2)}$$

$$1 = x^3(A+2C) + x^2(B+D) + x(A) + B$$

para que la igualdad sea cierta se debe cumplir que:

$$A + 2C = 0, \quad B + D = 0, \quad A = 0, \quad B = 1.$$

$\Rightarrow \quad A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad D = -1$ ■

ii) Calcule la primitiva de I:

Usando lo calculado en i) tenemos:

$$\int \frac{1}{x^2} + \frac{-1}{1+x^2}\, dx = \text{/álgebra integrales}$$

$$\int \frac{1}{x^2}\, dx + \int \frac{-1}{1+x^2}\, dx =$$

$$-\frac{1}{x} + C_1 - \arctan(x) + C_2 =$$

$$-\frac{1}{x} - \arctan(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$ ■