Guía Cálculo de una variable, Ejercicios Semana 3

Ejercicio 1: Demuestre que $f(x) = x^3$ es derivable en todo punto y que $f'(x) = 3x^2$

Desarrollo:
Notar que f es continua, al ser una potencia. Luego

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ y como sabemos por enunciado $f(x) = x^3$ quedando

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h\left(3x^2 + 3xh + h^2\right)}{h} \Rightarrow \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \Rightarrow 3x^2 + 3x0 + 0^2 \Rightarrow 3x^2.$$

Como el limite existe para un x arbitrario, entonces es derivable en todo punto.

Ejercicio 2: Encuentre la aproximacion afin de $\operatorname{sen}(x)$, en el punto $x = 3\pi/4$

Desarrollo:
La aproximacion afín de $f(x)$ en torno a x es esta definida por la funcion: $L(x) = f(x) + f'(x)(x - x)$
Luego se tiene $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $x = 3\pi/4$. Como $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$ entonces:

$$\begin{aligned} L(x) &= \operatorname{sen}(3\pi/4) + \cos(3\pi/4) \cdot (x - 3\pi/4) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}x \end{aligned}$$

Ejercicio 3: Probar que la función definida por $f(x) = \exp\left(-1/x^2\right)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es diferenciable en $x = 0$ con $f'(0) = 0$.

Desarrollo:

Para que $f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$ sea diferenciable en $x = 0$, debe existir el siguiente limite

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Por enunciado sabemos que $f(x) = 0$ y que $x = 0$ por lo que la expresión

anterior quedaría $\lim_{h \to 0} \frac{\exp\left(\frac{-1}{h^2}\right)}{h}$ por lo tanto
al momento de remplazar la variable h por el 0
se tendra una $\exp\left(-1/0.0000n\right)$ lo cual es igual a $(-\infty)$ y sabemos que una exponencial de $(-\infty)$ es igual a 0.
lo cual segun la funcion se tendra $0/0$
pero ademas se sabe que ...
en terminos de rapidez el h^2 es superior a h por eso se tendra que el numerador $\left(\exp\left(\frac{-1}{h^2}\right)\right)$
llegara primero a 0 que el denominador (h)
por lo tanto es cumple la existencia del limite que seria 0, y por esto se tiene
la diferenciabilidad en $c = 0$ (x barra) y con $f'(0) = 0$.

Ejercicio 4: Sea:

$$f(x) = 1 - \cos(x) \text{ para } x \in Q \text{ y } f(x) = 0 \text{ para } x \notin Q$$

Probar que *f* solo es derivable en $x = 0$ con $f'(0) = 0$.

Desarrollo:
Partimos por decir que por densidad en los irracionales, todo racional está rodeado por dos irracionales (Cuya diferencia es despreciable) por lo que por definición de f(x), todo $f(x)$, $x \in Q$ estará rodeado por $x_1, x_2 \notin Q$ cuyas imagenes en f son cero. Por otra parte, para que una función sea derivable en un punto se requiere que dicho punto tenga limites laterales convergentes a un mismo punto igual a la imagen del punto evaluado. Tomando en consideración lo mencionado, los únicos puntos que tienen limites laterales iguales a la imagen en el punto deseado son los ceros de $f(x)$, con $x \in \{x \mid x = 2k\pi, \ \forall k \in Z\}$.
Como agregado, al ser el cero un racional, tomamos su derivada como $f'(x) = -\sin x = 0$, mientras que el resto de los ceros son irracionales al contener π (Sabemos que toda multiplicación entre irracional y entero seguirá siendo irracional) por lo que su derivada es solamente 0, independiente de x.

Ejercicio 5: Sean $f, g: R \to R$ derivables en $a \in R$ con $f(a) = g(a)$ y $f'(a) = g'(a)$. Probar que toda función $h(\cdot)$ tal que $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ es derivable en a con $h'(a) = f'(a) = g'(a)$.

Desarrollo:
Comenzaremos evaluando las funciones f, g y h en a, manteniendo la desigualdad (por el momento).
Evaluando en a $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x) \Rightarrow f(a) \leqslant h(a) \leqslant g(a)$, pero sabemos que $f(a) = g(a)$ por enunciado.
Por lo tanto tendremos que $f(a) = h(a) = g(a)$
Ahora, restaremos las dos "desigualdades" que tenemos, vale decir $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ y $f(a) = h(a) = g(a)$.
Obtendremos, $f(x) - f(a) \leqslant h(x) - h(a) \leqslant g(x) - g(a)$, y ahora dividiremos por $x - a$ y le aplicaremos $\lim_{x \to a}$ a ambos lados, esto es con el fin de poder formar la definición de derivada en las tres funciones.
$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} \leqslant \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$. Pero, sabemos por enunciado que $f'(a) = g'(a)$, que por definición de derivada corresponde al límite de la izquierda y la derecha respectivamente., luego por el Teorema del Sandwich y definición de derivada, decimos que los tres límites y tres derivadas son iguales.
Por lo tanto finalmente obtendremos que,
$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \Rightarrow f'(a) = h'(a) = g'(a)$ y queda demostrado lo pedido.

Ejercicio 6: Sea $f: R \to R$ derivable en 0 tal que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \ \forall x, y \in R$. Probar que f es derivable en todo punto y que $f'(x) = f'(0) \cdot f'(x)$.
Nota: Tomar que $f(0) = 1$

Desarrollo:
Como f es derivable en cero se tiene que:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \qquad (1)$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} \qquad (2)$$

Ahora, para demostrar que f es diferenciable $\forall x \in R$, por definición debemos comprobar que el siguiente límite existe:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (3)$$

Aplicando la propiedad del enunciado y álgebra de límites podemos realizar el siguiente procedimiento:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (4)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) \cdot f(h) - f(x)}{h} \qquad (5)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \frac{f(h) - 1}{h} \qquad (6)$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} \qquad (7)$$

No obstante, reemplanzando el resultado conocido (2) realizando el cambio de variable "$x = h$":

$$f'(x) = f(x) \cdot f'(0) \qquad (8)$$

Por tanto, concluímos que f es diferenciable para todo punto y que tomando un x arbitrario se cumple que $f'(x) = f'(0) \cdot f'(x)$.

Ejercicio 7: Usando álgebra de derivadas, demuestre por inducción que las funciones f(x) = sen(nx) y
g(x) = cos(nx) son derivables con $f'(x) = n\cos(nx)$ y $g'(x) = -n\operatorname{sen}(nx)$

Desarrollo:

Para que sean derivables se deberá cumplir que:

$$f(x) = \operatorname{sen}(nx) \to f^{(h)}(x) = n^h \operatorname{sen}\left(nx + \frac{h\pi}{2}\right)$$

$$g(x) = \cos(nx) \to g^{(h)}(x) = n^h \cos\left(nx + \frac{h\pi}{2}\right)$$

Caso base: h=1
f(x):

$$\begin{aligned} f'(x) = n^1 \operatorname{sen}\left(nx + \frac{1*\pi}{2}\right) &= n\left(\operatorname{sen}(nx)*\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(nx)*\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = n(\operatorname{sen}(nx)*0 + \cos(nx)*1) \\ &= \left[n\cos(nx) = n^h \cos\left(nx + \frac{\pi*h}{2}\right)\right] \to H.I \end{aligned}$$

que se cumple por enunciado.
g(x):

$$\begin{aligned} g'(x) = n^1 \cos\left(nx + \frac{1*\pi}{2}\right) &= n\left(\cos(nx)*\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(nx)*\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = n(\cos(nx)*0 - \operatorname{sen}(nx)*1 \\ &= \left[-n\operatorname{sen}(nx) = n^h \cos\left(nx + \frac{\pi*h}{2}\right)\right] \to H.I \end{aligned}$$

que se cumple por enunciado
Paso inductivo:
f(x):

$$f^{(h+1)} = \left(f^{(h)}(x)\right)'$$

Dado nuestra H.I tenemos:

$$\begin{aligned} f^{(h+1)} &= \left(f^{(h)}(x)\right)' = \left[n^h \operatorname{sen}\left(nx + \frac{\pi*h}{2}\right)\right]' = n^h n\cos\left(nx + \frac{\pi*h}{2}\right) \\ &= n^{h+1}\cos\left(nx + \frac{\pi*h}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = n^{h+1}\cos\left(\left(nx + \frac{\pi*(h+1)}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= n^{h+1}\left(\cos\left(nx + \frac{\pi*(h+1)}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(nx + \frac{\pi*(h+1)}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= n^{h+1}\left(\cos\left(nx + \frac{\pi*(h+1)}{2}\right)*0 + \operatorname{sen}\left(nx + \frac{\pi*(h+1)}{2}\right)*1\right) \\ &= n^{h+1}\left(\operatorname{sen}\left(nx + \frac{\pi*(h+1)}{2}\right)\right) = f^{(h+1)} \checkmark\checkmark \end{aligned}$$

g(x):

$$g^{(h+1)} = \left(g^{(h)}(x)\right)'$$

Por H.I tenemos

$$\begin{aligned} g^{(h+1)} &= \left(g^{(h)}(x)\right)' = \left[n^h \cos\left(nx + \frac{\pi*h}{2}\right)\right]' = -n^h n\operatorname{sen}\left(nx + \frac{\pi*h}{2}\right) \\ &= -n^{h+1}\operatorname{sen}\left(nx + \frac{\pi*h}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -n^{h+1}\operatorname{sen}\left(\left(nx + \frac{\pi*(h+1)}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -n^{h+1}\left(\cos\left(nx + \frac{\pi*(h+1)}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(nx + \frac{\pi*(h+1)}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= -n^{h+1}\left(\cos\left(nx + \frac{\pi*(h+1)}{2}\right)*1 - \operatorname{sen}\left(nx + \frac{\pi*(h+1)}{2}\right)*0\right) \\ -n^{h+1}\cos\left(nx + \frac{\pi*(h+1)}{2}\right) &= n^{h+1}\left(-\cos\left(nx + \frac{\pi*(h+1)}{2}\right)\right) \\ &= n^{h+1}\cos\left(nx + \frac{\pi*(h+1)}{2}\right) = g^{(h+1)} \checkmark\checkmark \end{aligned}$$

Al cumplirse ambas igualdades podemos conlcuir, por ende, que g(x) y f(x) son derivables

Ejercicio 8: Encuentre la aproximación afín de f(x) = [sen(2x) + cos(2x)] exp(−x) en el punto x= −1.

Desarrollo:
para encontrar la aproximacion afin de f(x) usaremos la formula de punto pendiente, vista en el curso de introducción al calculo, la cual es:

y - y = m(x - x)
En este caso m, seria igual a la derivada de f, f es derivable por algrebra de funciones derivables. (pag 27 del apunte)

m= (f(x))´= ((sen(2x)+cos(2x))*exp(-x))´

por producto de derivadas (pag 25 del apunte)

m=(sen(2x)+cos(2x))´ * exp(-x) + (sen(2x)+cos(2x))*(exp(-x))´

por suma de derivadas y regla de la cadena (pag 25 y 27 del apunte)

m=((sen(2x))´ + (cos(2x))´) * esp(-x) + (sen(2x)+cos(2x)) * - exp(-x)

por regla de la cadena (pag 27 del apunte)

m=(2*sen(2x)+ 2*cos(2x))* exp(-x) + (sen(2x)+cos(2x)) * - exp(-x)

En este caso x=-1 ; y= f (-1)
f(-1)= (sen(-2)+cos(-2))* e
x=-1

Entonces, finalmente la aproximacion afin de f(x), seria igual a:
y - ((sen(-2)+cos(-2))* e)=(((sen(2x))´ + (cos(2x))´) * esp(-x) + (sen(2x)+cos(2x)) * - exp(-x)) * (x+1)

Ejercicio 9: Probar que $\arccos: [-1, 1] \to [0, \pi]$ **es derivable** $\forall y \in (-1, 1)$ **con** $\arccos'(y) = -1/\sqrt{1 - y^2}$**.**

Desarrollo:
Ocupando el teorema de la derivada en una funcion inversa se tiene los siguente:

$\operatorname{arcos}'(y) = \frac{1}{\cos'(\operatorname{arcos}(y))} = -\frac{1}{\operatorname{sen}(\operatorname{arcos}(y))}$ como arcos(y) $\in [0, \pi]$ el seno de dicho angulo sera siempre positivo por lo que podriamos decir que $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(y) = \sqrt{1 - \cos^2(y)}$

remplazando esto en nustra derivada obtenemos:

$\operatorname{arcos}'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\operatorname{arcos}(y))}}$ y como arcos es la inversa de cos, cos(arcos(x))=x

$\operatorname{arcos}'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$ ahora, como arcos es la inversa de cos su dominio es $[-1, 1]$ sin embargo hay que restringirlo al derivar ya que se indefine en 1 o -1, asi la funcion es derivable en (-1, 1)

Ejercicio 10: Probar que la función $\sinh^{-1}: R \to R$ es derivable en todo punto $y \in R$ con $\left(\sinh^{-1}\right)'(y) = 1/\sqrt{y^2 + 1}$.

Desarrollo:
Por contradicción supongamos que no es derivable para todo $y \in R$
por lo tanto $\exists y \in R \mid \left(\sinh^{-1}\right)'(y)$ no está definida.
es decir,
$\sqrt{(y^2} + 1) = 0$
$\Leftrightarrow y^2 = -1$
Lo cual es una contradicción dado que $y \in R$.
$\therefore \sinh^{-1}$ es derivable en todo punto perteneciente a los reales.

Ejercicios 11: Probar que $\cosh^{-1}: [1, \infty] \to R$ es derivable en todo punto $y > 1$ con $\left(\cosh^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$. ¿Qué ocurre en $y = 1$?

Desarrollo:

Si $y > 1$ se verifica que $\sqrt{y^2 - 1} > 0$, por lo que la derivada de $\cosh^{-1}$ está bien definida en $y > 1$.

Usamos el siguiente cambio de variable $x = \cosh^{-1}(y)$, con lo que $\cosh(x) = y$.

Luego, si derivamos con respecto a y:

$\Rightarrow \sinh(x)x' = 1$

$$\left(\cosh^{-1}\right)(y) = x' = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

La derivada en $y = 1$ no está definida pues 1 no pertenece al interior del dominio de $\cosh^{-1}(y)$, pues ademas en y=1 la derivada se va a indefinir pies el denominador cera cero.