MA1002-5 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Álvaro Hernández
Auxiliar: Luciano Avegno Cepeda

Resumen Control 2

0.1. Primitivas

Definición 1 (Primitiva)**.** *Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $Int(I)$, se llama primitiva de una función f sobre I si y solo si:*

$$\forall x \in Int(I), F'(x) = f(x)$$

Observación 1 (Primitivas Conocidas)**.** *Las siguientes primitivas pueden ser conocidas como significativas:*

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \forall n \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c$
3. $\int sen(x)dx = -cos(x) + c$
4. $\int cos(x)dx = sen(x) + c$
5. $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$
6. $\int senh(x)dx = cosh(x) + c$
7. $\int cosh(x)dx = senh(x) + c$
8. $\int sec^2(x)dx = tan(x) + c$
9. $\int cosec^2(x)dx = tan(x) + c$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctan(x) + c$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsen(x) + c$
12. $\int \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + c$

Observación 2. *Podemos aclarar lo siguiente:*

1. $\int f'(x)dx = f(x) + c$
2. $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$

Proposición 1. *$\int$ es un operador lineal, entonces:*

1. $\int f \pm g = \int f \pm$
2. $\int \alpha f = \alpha \int f$

Teorema 1 (Cambio de Variable)**.** *Si $u = g(x)$, entonces:*

$$\int f = \int (f \circ g) \cdot g'$$

Proposición 2 (Integración por Partes)**.** *Sean u y v dos funciones de x, entonces:*

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Donde $dv = v'(x)dx$ y $du = u'(x)dx$, para recordar la fórmula tenemos la siguiente frase "Sentado Un Día Vi Una Vaca Sentada Vestida De Uniforme"

Observación 3. *Cuando en una integral figuren expresiones del tipo que se indica, los siguientes cambios de variable son convenientes:*

1. *Para $a^2 + x^2$,usar $x = atan(v)$ o bien $x = asenh(t)$*
2. *Para $a^2 - x^2$, usar $x = asen(v)$ o bien $x = acos(v)$*
3. *Para $x^2 - a^2$, usar $x = asec(v)$ o bien $x = acosh(t)$*

Observación 4. *Considernado la integral del tipo:*

$$\int R(sen(x), cos(x))dx$$

En donde R es una función racional en la cual se operan solo $sen(x)$ y $cos(x)$ se aconseja el cambio de variable $t = tan(\frac{x}{2})$

0.2. Sumatorias de Riemann

Definición 2. *Sea E un conjunto de puntos del plano $0XY$. El área del conjunto E será un número real $A(E)$ que cumple las siguientes condiciones:*

- $A(E) \geq 0$
- $E \subseteq F \Rightarrow A(E) \leq A(F)$
- *Si $E \cap F = \emptyset \Rightarrow A(E \cup F) = A(E) + A(F)$*
- *El área de una región rectangular E de lados a y b es $A(E) = a \cdot b$*

Definición 3 (Partición de un Intervalo)**.** *El conjunto $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una partición del intervalo $[a,b]$ si $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Si P es una partición de $[a,b]$ se llama norma de P y se denota por $|P|$ al real:*

$$|P| = max\{(x_i - x_{i-1}) : i = 1, ..., n\}$$

Definición 4 (Sumas Superiores e Inferiores)**.** *Sea f una función definida y acotada en $[a,b]$*[1]*. Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Como f es acotada en $[a,b]$ también lo es en cada intervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i] \forall i = 1, ..., n$ luego podemos definit:*

$$m_i(f) = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i(f) = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Con esto se definen las siguientes sumas:

1. *$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1})$ se llama suma superior de f correspondiente a la partición P.*

2. *$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$ se llama suma inferior de f correspondiente a la partición P.*

Definición 5 (Integrales Superiores e Inferiores)**.** *Sea $\mathcal{P}_{[a,b]}$ el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$. Sea f una función definida y acotada sobre $[a,b]$. Los números reales:*

$$\int_{-a}^{b} = sup\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$$

$$\int_{a}^{-b} f = inf\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$$

Se llama integral inferior de f en $[a,b]$ e integral superior de f en $[a,b]$ respectivamente

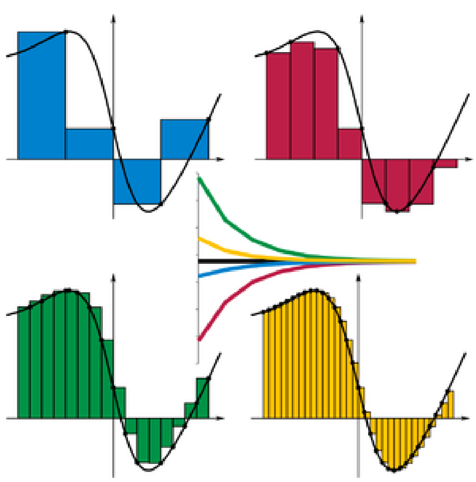

Figura 1: Cuatro de los métodos de suma de Riemann para aproximar el área bajo las curvas

Fórmula 1 (Integrabilidad de Riemann)**.**

$$\lim_{n \to n} . \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Definición 6 (Refinamiento de una Partición o Partición Más Fina)**.** *Sean P y Q dos particiones de $[a,b]$ si $P \subseteq Q$ diremos que Q es un refinamiento P o una partición más fina que P.*

Proposición 3. *Si $P \subseteq Q$ entonces:*

$$s(f,P) \leq s(f,Q)$$
$$S(f,P) \geq S(f,Q)$$

Definición 7. *Diremos que una función f definida y acotada en $[a,b]$ es integrable según Riemann si se cumple que $\int_{-a}^{b} f = \int_{a}^{-b} f$, en tal caso, el valor común de estas dos integrales se llaman simplemente la integral de f en $[a,b]$ y se denota por $\int_a^b f$*

Teorema 2 (Condición de Riemann)**.** *Una función f definida y acotada en un intervalo $[a,b]$ es Riemann-integrable en $[a,b]$ si y solo si:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}) S(f,P) s(f,P) < \epsilon$$

Proposición 4. *Si f es una función definida, acotada y monótona en $[a,b]$, entonces es integrable en $[a,b]$*

Teorema 3. *Si f es una función continua en $[a,b]$ entonces es integrable en $[a,b]$*

Corolario 1. *Si f es continua en $[a,b]$, entonces:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]})\{|P| \leq \delta \Rightarrow$$
$$|\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x_i})(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f| \leq \epsilon\}$$

Lema 1. *Si f es una función integrable en $[a,b], a < b$ y $[r,s] \subseteq [a,b]$ con $r < s$, entonces f es integrable en $[r,s]$*

Lema 2. *Si f está definida y es acotada en $[a,b], a < b$ y $c \in (a,b)$ entonces:*

$$\int_{-a}^{b} f \geq \int_{-a}^{c} f + \int_{-c}^{b} f$$
$$\int_{-a}^{b} f \leq \int_{a}^{-c} f + \int_{c}^{-b}$$

Lema 3. *Si f y g son dos funciones definidas y acotadas en $[a,b], a < b$, entonces:*

$$\int_{-a}^{b} f + \int_{-a}^{b} g \leq \int_{-a}^{b} (f+g)$$
$$\int_{a}^{-b} (f+g) \leq \int_{a}^{-b} f + \int_{a}^{-b} g$$

Teorema 4 (Propiedades de la Integral)**.** *Notamos lo siguiente:*

1. *Si* $c \in \mathbb{R}$ *entonces* $\int_a^b c = c(b-a)$
2. *Si* f *es integrable en* $[a,b]$ *y* $c \in (a,b)$ *entonces* f *es integrable en* $[a,c]$ *y* $[c,b]$ *y además:*
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
3. *Si* f *es integrable en* $[a,c]$ *y en* $[c,b]$ *entonces* f *es integrable en* $[a.b]$ *y:*
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
4. *Si* f *y* g *son funciones integrables en* $[a,b]$ *entonces* $(f+g)$ *es integrable en* $[a,b]$ *y:*
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b f$$
5. *Si* f *es una función integrable en* $[a,b]$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$ *entonces* (αf) *es integrable en* $[a,b]$ *y:*
$$\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f$$
6. *Si* f *y* g *son integrables en* $[a,b]$ *y* $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a,b]$ *entonces:*
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$
7. *Si* f *es integrable en* $[a,b]$ *entonces* $|f|$ *es integrable en* $[a,b]$ *y:*
$$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$$

Definición 8. *Sea* f *una función integrable en un intrvalo* $[p,q]$*. Si* $a,b \in [p,q]$ *son tales que* $a \geq b$ *entonces se define la integral de* a *a* b *del modo siguiente:*
$$\int_a^b f = -\int_b^a f \text{ si } a > b, o$$
$$\int_a^b f = 0 \text{ si } a = b$$

Proposición 5. *Sean* f *y* g *integrales en* $[p,q]$ *y* $a,b \in [p,q]$ *entonces:*

1. $\int_a^b \alpha = \alpha(b-a), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \forall c \in [p,q]$
3. $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
5. $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [p,q] \Rightarrow |\int_a^b f| \leq |\int_a^b g|$
6. $|\int_a^b f| \leq |\int_a^b |f||$

0.3. Teorema Fundamental del Cálculo

Proposición 6. *Sea* f *una función integrable en* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$*. Entonces la función* G *definida por:*
$$G(x) = \int_a^x f$$
es continua en $[a,b]$*.*

Teorema 5 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Si* f *es una función continua en un intervalo* $I \subseteq \mathbb{R}$ *y* $a \in I$ *entonces la función* G *está definida por:*
$$G(x) = \int_a^x f$$
Es derivable en $int(I)$ *y además* $G' = f$ *en* $int(I)$*.*

Corolario 2. *Si la función* F *es continua en* I*, es una primitiva* f *en* I*, entonces:*
$$\forall a,b \in I, \int_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema 6 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea* f *integrable en* $[a,b]$*. Si existe una función* F *continua en* $[a,b]$ *y derivable en* (a,b) *tal que* $F' = f$ *en* (a,b)*, entonces:*
$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Teorema 7. *Sean* f *y* g *son dos funciones conitnuas en un intervalo* I *y diferenciables en* $int(I)$*. Sean* $a,b \in int(I)$*. Si* f' *y* g' *son continuas entonces:*
$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

Teorema 8. *Sea g una función continua en un intervalo I y derivable en $int(I)$ con g' continua. Sean $a, b \in int(I)$, con $a < b$. Sea f una función continua en $g([a,b])$, entonces:*

$$\int_a^b (f \circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f$$

Definición 9 (Valor Medio de una Función)**.** *Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$. Se llama valor medio de f en $[a,b]$ al número real:*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

A este real se le anota $\bar{f}$ o. bien $< f >$

Teorema 9 (Valor Medio para Integrales)**.** *Si f es continua en $[a,b]$ entonces $\exists \xi \in (a,b)$ tal que $f(\xi) =< f >$, es decir:*

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$$

Teorema 10 (Valor Medio Generalizado para Integrales)**.** *Si f es continua en $[a,b]$ y g es una función integrable en $[a,b]$ que no cambia de signo, entonces $\exists \xi \in [a,b]$ tal que:*

$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g$$

Teorema 11 (Taylor con Resto Integral)**.** *Se calcula con la siguiente fórmula:*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

Llamaremos al término:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

como el resto integral del desarrollo de Taylor.