Guía de Ejercicios Semana 9

Ejercicio 1:

Sea $f : R \to R$ tal que f es periódica de periodo p. Pruebe que:

$$\int_a^{a+p} f(x) = \int_0^p f(x)\,, \ \forall a \in R$$

En efecto, dada la instrucción se nos pide demostrar que la igualdad anteriormente enunciada se cumple para cualquier valor de a, por tanto, definiremos la función auxiliar $g(x)$ y demostraremos que esta es constante $\forall a \in R$, es decir, $g'(a) = 0 \ \ \forall a \in R$.

$$\text{Sea } g(a) = \int_a^{a+p} f(x)\,, \ \text{pdq} \ \ g'(a) = 0 \ \forall a \in R$$

Aplicamos el Principio de Leibniz para la derivada de la integral definida (TFC2):

$$g'(a) = \frac{d}{da}\left(\int_a^{a+p} f(x)\right)$$

$$g'(a) = f(a+p)\cdot(a+p)' - f(a)\cdot(a)'$$

$$g'(a) = f(a+p) - f(a)$$

Recordar que como f es función periódica de periodo p se tiene que $f(a) = f(a+kp), \ \forall k \in Z$, donde para $k = 1$ obtenemos $f(a) = f(a+p)$, por tanto, $g'(a) = \ 0 \ \forall a \in R$ y por consiguiente $g(a)$ es una función constante.

Entonces, evaluando $a = 0$:

$$g(0) = \int_0^{0+p} f(x) \ = \ \int_0^p f(x)$$

Demostrando así lo solicitado.

Ejercicio 2:

Hacer una aseveración general relativa a $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ para f una función impar y otra para f función par

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_{-a}^0 f(x)\,dx \qquad , \ u = -x \ \to \ du = dx$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx - \int_a^0 f(-u)du \ = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(-u)du$$

Sabemos que se cumple:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a (f(x) + f(-x))dx$$

Caso par: Por el semestre anterior sabemos que $f(-x) = \ f(x)$, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a (f(x)+f(-x))dx \ = \ 2\int_0^a f(x)\,dx$$

Caso impar: Por el semestre anterior sabemos que $f(-x) = \ - \ f(x)$, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a (f(x)+f(-x))dx = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx \ = \ 0$$

Ejercicio 3:

Demuestre que si f es una función continua en $[a,b]$ y $\int_a^b f(x) = 0$, **entonces existe un** c **en** $[a,b]$ **tal que** $f(c) = 0$.

En primer lugar se logra apreciar que f es una función continua en $[a, \ b]$, por lo tanto se puede utilizar el TVM para integrales. Este indica que $\exists \xi \ \in \ (a, \ b)$, tal que $\int_a^b f(x) \ = \ f(\xi)(b \ - \ a)$

Por enunciado se dice que $\int_a^b f(x) = 0 \ \Rightarrow \ f(\xi)(b \ - \ a) \ = \ 0 \ \Rightarrow \ f(\xi) \ = \ 0$

Cambiando ξ por c queda demostrado lo solicitado.

Ejercicio 4:

Hallar $\int_a^b\left(\int_a^b f(x)\,g(y)\,dy\right)dx$ en términos de $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$

Desarrollo:

Ya que $f(x)$ es constante en la integral de adentro:

$$\int_a^b\left(\int_a^b f(x)\,g(y)\,dy\right)dx \ = \int_a^b f(x)\left(\int_a^b g(y)\,dy\right)dx$$

como $\int_a^b g(y)\,dy$ es constante en terminos de dx, se puede concluir que:

$$= \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(y)\,dy\right)$$

Ejercicio 5:

Hallar $F'(x)$ si $F(x) = \int_0^x xf(t)dt.$

$$F'(x) \ = \ \left(\int_0^x xf(t)dt\right)' = \left(x\int_0^x f(t)dt\right)' = x'\int_0^x f(t)dt + x\left(\int_0^x f(t)dt\right)'$$

Por TFC 1 :

$$= \int_0^x f(t)dt + xf(x) \qquad \square$$

Ejercicio 6:

Demostrar que si f es continua entonces $\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du$

Desarrollo:

$$\text{En efecto, tomando } u = \int_0^u f(t)dt, \ du = f(u), \ v = u, \ dv = 1$$

(por propiedad de Integración por Partes)

$$\Rightarrow \int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du \ = \left(u\int_0^u f(t)dt\right)\Big|_0^x - \int_0^x f(u)du$$

$$= x\int_0^x f(t)dt - \int_0^u uf(u)du$$

$$= \int_0^x xf(t)dt - \int_0^x uf(u)du$$

$$= \int_0^x xf(u) - uf(u)du$$

$$= \int_0^x f(u)(x-u)du \qquad \square$$

Ejercicio 7:

Suponga que f es integrable en $[a,b]$ .Demostrar que existe un $x \in [a,b]$ tal que $\int_a^x f = \int_x^b f$

Demostrar, con un ejemplo, que no siempre es posible elegir x que este en (a, b).

notar:

definamos $g(x) \ = \int_a^b f \ - \ 2\int_a^x f\,,$

notar que como f es integrable en [a,b] $\Rightarrow$ $g(x)$ es continua en [a,b].

para demostrar lo pedido basta encontrar un $x_0 \in [a,b]$ tal que $g(x) \ = \ 0.$

observemos:

$$g(a) = \int_a^b f - 2\int_a^a f = \int_a^b f$$

y

$$g(b) = \int_a^b f - 2\int_a^b f = -\int_a^b f$$

Luego en virtud del T.V.I se tiene:

$$g(a)g(b) \leqslant 0 \Rightarrow \ \exists \ x_0 \in [a,b] \text{ tal que } g(x_0) = 0$$

se concluye que $\exists \ x_0 \in [a,b]$ tal que

$$g(x_0) = \int_a^b f \ - \ 2\int_a^x f = 0 \Rightarrow \int_a^b f \ = \ 2\int_a^x f$$

$$\int_a^x f + \int_x^b f = 2\int_a^x f \ \Rightarrow \int_x^b f = \int_a^x f$$

obteniendo lo pedido

ahora si se tiene que

$$\int_a^b f = 0$$

se tendra que tomar un $x_0 = b \ \lor x_0 = a$ para obtener lo pedido, concluyendo que $x_0 \notin (a, \ b)$

Ejercicio 8:

Calcule las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \int_1^{x^2} \sin\left(t^4\right)dt$ b) $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{t^2}{1+t^6}dt$ c) $f(x) = \int_{x^3}^{\cos(x)} (x-t)\sin\left(t^2\right)dt$

desarrollo:

----

a) $f(x) = \int_1^{x^2} \sin\left(t^4\right)dt$, por T.F.C tenemos que $\int_1^{x^2} \sin\left(t^4\right)dt = F\left(x^2\right) - F(1)$, donde F es una primitiva de $\sin\left(t^4\right)$, Luego derivamos aplicando regla de la cadena y notando que por TFC

$F' = \sin\left(t^4\right)$ nos queda $\left(\int_1^{x^2} \sin\left(t^4\right)dt\right)' = F'\left(x^2\right) - F'(1) = \sin\left(x^8\right)\cdot\left(x^2\right)' - \sin(1)\cdot(1)'$

finalmente nos queda $\sin\left(x^8\right)2x - \sin(1)\cdot 0 = 2x\sin\left(x^8\right)$.

Por lo tanto la derivada de la función es $f(x)' = \left(\int_1^{x^2} \sin\left(t^4\right)dt\right)' = 2x\sin\left(x^8\right)$.

----

b) $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{t^2}{1+t^6}dt$, por T.F.C tenemos que $\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{t^2}{1+t^6}dt = F\left(x^2\right) - F\left(\sqrt{x}\right)$ donde F es una primitiva de $\frac{t^2}{1+t^6}$, ahora derivamos $f(x)$ de modo que aplicamos regla de la cadena y notamos que por T.F.C $F' = \frac{t^2}{1+t^6}$ por lo que nos queda

$\left(\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{t^2}{1+t^6}dt\right)' = F'\left(x^2\right) - F'\left(\sqrt{x}\right) = \frac{x^4}{1+x^{12}}\cdot\left(x^2\right)' - \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{1+\left(\sqrt{x}\right)^6}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'$ finalmente resolviendo

las derivadas nos queda $\frac{x^4}{1+x^{12}}\cdot 2x - \frac{x}{1+x^3}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{2x^5}{1+x^{12}} - \frac{\sqrt{x}}{2+2x^3}$.

Por lo tanto la derivada de la función es $f(x)' = \left(\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{t^2}{1+t^6}dt\right)' = \frac{2x^5}{1+x^{12}} - \frac{\sqrt{x}}{2+2x^3}$.

----

c) $f(x) = \int_{x^3}^{\cos(x)} (x-t)\sin\left(t^2\right)dt$, podemos escribir la función como $\int_{x^3}^{\cos(x)} (x-t)\sin\left(t^2\right)dt = \int_{x^3}^{\cos(x)} x\sin\left(t^2\right)dt - \int_{x^3}^{\cos(x)} t\sin\left(t^2\right)dt$ y como la integral no depende de x queda: $x\int_{x^3}^{\cos(x)} \sin\left(t^2\right)dt - \int_{x^3}^{\cos(x)} t\sin\left(t^2\right)dt$. Luego por T.F.C. tenemos que

$\int_{x^3}^{\cos(x)} \sin\left(t^2\right)dt = \ F(\cos(x)) - F\left(x^3\right)$, con F primitiva de $\sin\left(t^2\right)$ y

$\int_{x^3}^{\cos(x)} t\sin\left(t^2\right)dt = H(\cos(x)) - H\left(x^3\right)$, con H primitiva de $t\sin\left(t^2\right)$.

Por lo que juntando todo nos queda: $xF(\cos(x)) - xF\left(x^3\right) - H(\cos(x)) + H\left(x^3\right)$,ahora derivamos $f(x)$ de modo que aplicamos la regla de la cadena y notando que por T.F.C $F' = \sin\left(t^2\right)$ y $H' = t\sin\left(t^2\right)$ nos queda:

$$\left[(x)'\cdot F(\cos(x)) + x\cdot F'(\cos(x))\cdot\cos'(x)\right] - \left[(x)'\cdot F\left(x^3\right) + x\cdot F'\left(x^3\right)\cdot\left(x^3\right)'\right] - \left[H'(\cos(x))\cdot\cos'(x)\right] + \left[H'\left(x^3\right)\cdot\left(x^3\right)'\right]$$

Luego resolviendo nos queda:

$$F(\cos(x)) - x\sin\left(\cos(x)^2\right)\sin(x) - F\left(x^3\right) - 3x^3\sin\left(x^6\right) + \cos(x)\sin\left(\cos(x)^2\right)\sin(x) + 3x^5\sin\left(x^6\right)$$

$= \sin\left(\cos(x)^2\right)\sin(x)\left[\cos(x) - x\right] + 3x^3\sin\left(x^6\right)\left[x^2 - 1\right] + F(\cos(x)) - F\left(x^3\right)$, donde si recordamos nos damos cuenta que $F(\cos(x)) - F\left(x^3\right) = \int_{x^3}^{\cos(x)} \sin\left(t^2\right)dt$, por lo tanto al reemplazar nos queda:

$$\sin\left(\cos\left(x^2\right)\right)\sin(x)\left[\cos(x) - x\right] + 3x^3\sin\left(x^6\right)\left[x^2 - 1\right] + \int_{x^3}^{\cos(x)} \sin\left(t^2\right)dt\,.$$

Finalmente la derivada de la función es

$$f(x)' = \left[\int_{x^3}^{\cos(x)} (x-t)\sin\left(t^2\right)dt\right]' = \sin\left(\cos(x)^2\right)\sin(x)\left[\cos(x) - x\right] + 3x^3\sin\left(x^6\right)\left[x^2 - 1\right] + \int_{x^3}^{\cos(x)} \sin\left(t^2\right)dt.$$

Ejercicio 9:

Sea f una función tal que $f(x) = \int_0^x (x \ - \ t)^2 f(t)dt$. Muestre que $f''(x) \ = \ 2f(x)$.

Desarrollando el binomio al cuadrado:

$$f(x) = \int_0^x x^2 - \ 2tx \ + \ t^2 \ f(t)\,dt$$

$$f(x) \ = \int_0^x x^2 \ f(t)\,dt \ - \int_0^x 2tx \ f(t)\,dt \ + \int_0^x t^2 \ f(t)\,dt$$

$$f'(x) \ = \ 2x\int_0^x f(t)\,dt \ - \ 2\int_0^x tf(t)\,dt$$

$$f''(x) \ = \ 2\int_0^x f(t)\,dt$$

Por lo que se cumple que:

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x (x \ - \ t)^2 f(t)dt$$

Por lo que queda demostrado que:

$f''(x) \ = \ 2f(x)$