Guía de Problemas Semana 8

Problema 1:

Considere la sucesión $a_n = \int_0^n q^x\,dx$, con $0 < q < 1$.

(a) Explique por qué (a_n) está bien definida, es decir, por qué q^x es Riemann integrable en [0, n], y muestre que es estrictamente creciente.

Claramente podemos visualizar que q^x es estrictamente decreciente (sucesión de límite conocida de intro. al cálculo), sin embargo, nunca dejará de ser positivo. Por otra parte también sabemos que $q^0 = 1$, por lo tanto ya poseemos una cota inferior y superior.

$$0 < q^x \leq 1 \qquad \forall x \in [0, n]$$

Conociendo esto y complementandolo con el hecho de que es una sucesión monótona, sabemos que esta es en efecto Riemann integrable.

Ahora, veremos que a_n es estrictamente creciente mediante $a_{n+1} - a_n > 0$ desarrollando:

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^{n+1} q^x dx - \int_0^n q^x dx = \int_n^{n+1} q^x dx$$

Esta ultima integral es en efecto positiva ya que sabemos que el argumento de la integral es siempre positivo.

(b) Calcule las sumas de Riemann inferior y superior para q^x y la partición P = {0, 1, ..., n}.
para esto, lo que se nos pide calcular es lo siguiente:

$$s(q^x, P) \text{ y } S(q^x, P)$$
$$\text{siendo estas por definición:}$$
$$s(q^x, P) = \sum_{i=1}^{n} q^{x_i} \Delta x_i$$
$$S(q^x, P) = \sum_{i=1}^{n} q^{x_{i-1}} \Delta x_i \ (x_{i-1} \text{ ya que es decreciente})$$
$$\text{Pero sabemos que } \Delta x_i = 1 \text{ ya que se nos da la partición espaciada entre 1, por ende}$$

$$s(q^x, P) = \sum_{i=1}^{n} q^{x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} q^{x_i} \ (x_i = i) = \sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q - q^{n+1}}{1-q}$$
$$S(q^x, P) = \sum_{i=1}^{n} q^{x_{i-1}} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} q^{x_i} \ (x_{i-1} = i-1) = \sum_{i=1}^{n} q^{i-1} = \frac{1 - q^n}{1-q}$$

(c) Utilice las sumas anteriores para obtener las siguientes cotas para (a_n).

$$\forall n \in N,\ q\frac{1-q^n}{1-q} < \int_0^n q^x\,dx < \frac{1}{1-q}$$

Sabemos que $s(q^x, P) < \int_0^n q^x\,dx < S(q^x, P)$, a partir de esto llegaremos a las cotas pedidas:

$$\text{Usando lo hecho en el apartado b:}$$
$$\frac{q - q^{n+1}}{1-q} < \int_0^n q^x\,dx < \frac{1 - q^n}{1-q} \text{ (factorizamos la izquierda por q)}$$
$$q\frac{1-q^n}{1-q} < \int_0^n q^x\,dx < \frac{1 - q^n}{1-q} \left(\text{como } q^n \text{ se está restando}\right)$$
$$q\frac{1-q^n}{1-q} < \int_0^n q^x\,dx < \frac{1 - q^n}{1-q} < \frac{1}{1-q}$$
$$\text{Con esto tenemos la desigualdad con las cotas pedidas:}$$
$$q\frac{1-q^n}{1-q} < \int_0^n q^x\,dx < \frac{1}{1-q}$$
$$\text{Esto demostrado para todo n.}$$

(d) Concluya que a_n converge y que a_n= limite satisface

$$\frac{q}{1-q} \leq a \leq \frac{1}{1-q}$$

Partimos de la base del ejercicio anterior:

$$q\frac{1-q^n}{1-q} < \int_0^n q^x\,dx < \frac{1}{1-q}$$

de esto tomaremos el límite, la cota de la derecha se mantendra constante ya que no se ve afectada por n mientras que la integral del medio será reemplazada por su límite a:

$$q\frac{1-q^n}{1-q} \leq a \leq \frac{1}{1-q}$$
$$\text{Luego como } q^n \text{ sabemos que tiende a 0, podemos eliminarlo, quedando así:}$$
$$q\frac{1}{1-q} \leq a \leq \frac{1}{1-q}$$
$$= \frac{q}{1-q} \leq a \leq \frac{1}{1-q}$$

Siendo estas las cotas que se nos pide demostrar en el enunciado, está resuelto el ejercicio.

Problema 2:

Sea f : [a, b] → R una función integrable y acotada inferiormente por una constante c > 0.
Para demostrar que $\frac{1}{f}$ es integrable, se pide lo siguiente:

a) Si S(•,•) y s(•,•) denotan las sumas superiores e inferiores, pruebe que para toda la partición P del intervalo [a,b] se cumple:

$$S\left(\frac{1}{f}, P\right) - s\left(\frac{1}{f}, P\right) \leqslant \frac{1}{c^2}\{S(f, P) - s(f, P)\}$$

PDQ: para toda la partición P del intervalo [a,b] se cumple la desigualdad

Comenzemos calculando las sumas inferiores e superiores:

$$\rightarrow s\left(\frac{1}{f}, P\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{1}{f}\right)\Delta x_i \ \Big|\ m_i = \inf\left\{\frac{1}{f} : x \in (x_{i-1}, x_i)\right\}$$
$$\Rightarrow m_i = \frac{1}{f(x_i)} \iff f(x_i) = \frac{1}{m_i} \quad \text{(a)}$$
$$\rightarrow S\left(\frac{1}{f}, P\right) = \sum_{i=1}^{n} M_i\left(\frac{1}{f}\right)\Delta x_i \ \Big|\ M_i = \sup\left\{\frac{1}{f} : x \in (x_{i-1}, x_i)\right\}$$
$$\Rightarrow M_i = \frac{1}{f(x_i)} \iff f(x_i) = \frac{1}{M_i} \quad \text{(b)}$$

Notar que (a) y (b) pueden ser igualadas

$$\Rightarrow \frac{1}{M_i(f)} = m_i\left(\frac{1}{f}\right) \wedge \frac{1}{m_i(f)} = M_i\left(\frac{1}{f}\right)$$

Por lo tanto, tenemos que,

$$S\left(\frac{1}{f}, P\right) - s\left(\frac{1}{f}, P\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{m_i(f)}\right)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{M_i(f)}\right)\Delta x_i$$
$$\iff \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{m_i(f)} - \frac{1}{M_i(f)}\right)\Delta x_i \iff \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{M_i(f) - m_i(f)}{M_i(f)\cdot m_i(f)}\right)\Delta x_i$$

Sabiendo que por enunciado, c es cota inferior de $f(x)$

$$\Rightarrow M_i(f)\cdot m_i(f) > c \iff \frac{1}{M_i(f)\cdot m_i(f)} < c$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{M_i(f)\cdot m_i(f)}\right)^2 < c^2 \ \} \rightarrow \star$$

Usando " ⋆ ", el desarrollo, finalmente iría quedando como:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{M_i(f) - m_i(f)}{M_i(f)\cdot m_i(f)}\right)\Delta x_i < \left(\frac{1}{c}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}(M_i(f) - m_i(f))\Delta x_i \iff \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{n}(M_i(f)\Delta x_i - m_i(f)\Delta x_i)$$

$$\iff \frac{1}{c^2}\left(\sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta x - \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i\right) \iff \frac{1}{c^2}(S(f, P) - s(f, P))$$

$$\therefore S\left(\frac{1}{f}, P\right) - s\left(\frac{1}{f}, P\right) \leqslant \frac{1}{c^2}(S(f, P) - s(f, P)) \text{ (solo se intercambió los paréntesis "\{ \}" por "()")}$$

Siendo la desiguladad que se nos pedia comprobar.

b) Use el resultado anterior para demostrar que la función $\frac{1}{f}$ es integrable en [a,b].

PDQ: $\frac{1}{f}$ es Riemann Integrable

→Usemos la condicion de Riemann, es decir,...

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in P_{[a,b]},\ S(f, P) - s(f, p) < \varepsilon \text{ (expresion general)}$$

→Ocurre que, por enunciado, f es R-I. Por ende, sabemos que existe una particion para la cual, $\varepsilon > 0$.

∴ Planteando que $S\left(\frac{1}{f}, P\right) - s\left(\frac{1}{f}, P\right)$, por lo demostrado en la parte "a)",...

$$S\left(\frac{1}{f}, P\right) - s\left(\frac{1}{f}, P\right) \leqslant \frac{1}{c^2}(S(f, P) - s(f, P)) \ \text{(1)}$$

Dado esto y planteando un $\varepsilon \cdot c^2 > 0$, tenemos que...

$$(S(f, P) - s(f, P)) < \varepsilon \cdot c^2 \iff \frac{(S(f, P) - s(f, P))}{c^2} < \varepsilon$$

Lo cual, por transitividad dada la ecuacion (1) y tomando este epsilon, podemos concluir que:

$$S\left(\frac{1}{f}, P\right) - s\left(\frac{1}{f}, P\right) \leqslant \frac{(S(f, P) - s(f, P))}{c^2} < \varepsilon \Rightarrow S\left(\frac{1}{f}, P\right) - s\left(\frac{1}{f}, P\right) < \varepsilon$$

En base a este epsilon tomado (el cual es arbitrario), podemos concluir que existe una particion que cumple la propiedad, por lo cual se cumple, que la funcion es efectivamente, Riemann Integrable.

Problema 3:

Sea $f : [1, \infty[\rightarrow R$ una función no negativa y creciente.

a) Usando la partición $P = \{1, 2, 3, ..., n\}$ preuebe que :

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leqslant \int_1^n f(x)dx \leqslant \sum_{i=2}^{n} f(i),\ \forall n \geqslant 2.$$

Sea la suma inferior: $s(f, P) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \triangle x_i$, donde $\triangle x_i = 1$ y $m_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

Como f es creciente: $x_i = i + 1$ y $x_{i-1} = i \Rightarrow m_i = f(x_i)$

$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$ por lo que se tiene la siguiente desigualdad:

$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leqslant \int_1^n f(x)dx$

Sea ahora la suma superior:

$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i \triangle x_i$, donde $\triangle x_i = 1$ y $M_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, análogamente se obtiene:

$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i+1)$, donde se puede cambiar el inicio y termino de la sumatoria modificando un valor dentro de esta, nos queda que:

$\sum_{i=1}^{n-1} f(i+1) = \sum_{i=2}^{n} f(i)$, donde obtenemos la siguiente desigualdad:

$\int_1^n f(x)dx \leqslant \sum_{i=2}^{n} f(i).$

Ahora juntando ambas desigualdades, queda demostrado:

$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leqslant \int_1^n f(x)dx \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(i).$

b) Considere $f(x) = \ln(x)$ y utilice la parte anterior para demostrar que:
$(n - 1)! \leq n^n \exp(-n+1) \leq n!,\ \forall n \geq 1.$

Indicación: $\int_1^n \ln(x)dx = n\ln(n) - (n + 1).$

Como f es positiva y creciente se puede ocupar la parte a):

$(1)\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leqslant (2)\int_1^n f(x)dx \leqslant (3)\sum_{i=1}^{n} f(i)$

De (1): $\sum_{i=1}^{n-1} \ln(i) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n-1} i\right) = \ln((n-1)!)$

De (3): $\sum_{i=1}^{n} \ln(i) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n-1} i\right) = \ln(n!)$

De (2): $\int_1^n f(x)dx = x\ln(x) - x\,|_1^n = n\ln(n) - n - (1 * \ln(1) - 1) = n\ln(n) + 1$

Reemplazando en la desigualdad de la parte a):
$\ln((n-1)!) \leqslant n\ln(n) - n + 1 \leqslant \ln(n!)$ / exp ()
$= \exp(\ln((n-1)!) \leqslant \exp(n\ln(n) - n + 1) \leqslant \exp(\ln(n!))$
$= (n-1)! \leqslant \exp(n\ln(n)) * \exp(-n + 1) \leqslant n!$
$= (n-1)! \leqslant n^n * \exp(-n + 1) \leqslant n!$
Se cumple que es para todo n⩾ 1 pues la integral y el valor de las multiplicaciones del logaritmo son desde i=1 hasta n.

Problema 4:

Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$, $x \in [0, 1]$.

a) Calcule $s(f, P)$ y $S(f, P)$.

$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$:

podemos ver que $\forall [x_{i-1}, x_i] \in P$, y $\forall P \in P_{0,1}$, $\exists\, x \in Q$ (por densidad de los racionales en R), $1/q \geqq 0 \Leftrightarrow f(x)$, $x \in Q$ siempre es máximo de su intervalo.
Luego,

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x_i}{q},\ x = \frac{p}{q}$

No hay una suma superior única, pues si la partición tuviese un solo intervalo de 0 a 1, entonces, el área sería 1 $\left(\sum_{i=1}^{1} 1(1-0) = 1\right)$, mientras que con $|P| \rightarrow 0$, el área es 0.

$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$

podemos ver que $\forall [x_{i-1}, x_i] \in P$, y $\forall P \in P_{0,1}$, $\exists\, x \in$ irracionales (por densidad de los irracionales en R). Como la función está definida para los irracionales y además $\left(0 \wedge \frac{1}{q} \geqslant 0\right)$, tenemos que $\forall x \in [0, 1],\ f(x) \geqq 0$.

Por lo que el $\min(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \inf\{f(x) = m_i(f)\} = 0$

$$\Rightarrow s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} 0 * \Delta x_i = 0$$

b) Calcule $\inf S(f, P),\ P \in P_{0,1}$ y $\sup s(f, P),\ P \in P_{0,1}$

Claramente $\sup s(f, P),\ P \in P_{0,1} = 0$
pues $s(f, P) = 0, \quad \forall [x_{i-1}, x_i] \in P, \quad \text{y} \quad \forall P \in P_{0,1}$.
$\sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i$

Para $\inf S(f, P),\ P \in P_{0,1}$:
Cuando $|P| \rightarrow 0$ ocurre que $m_i \rightarrow 0$, $\quad \forall [x_{i-1}, x_i] \in P$, por tanto:
$\inf S(f, P),\ P \in P_{0,1} = 0$
pues, al ser $f([0,1]) \geqq 0 \Rightarrow S(f, P) \geqq 0$, entonces 0 es mínimo, y por tanto, el ínfimo que tal suma puede tomar.

c) Concluya que f es integrable y que $\int_0^1 f = 0$.

Como $\inf S(f, P),\ P \in P_{0,1} = \overline{\int_0^1} f = \sup s(f, P),\ P \in P_{0,1} = \int_0^1 f = \int_0^1 f$
Se concluye que la función $\overline{f(x)}$ es Riemann - integrable (por tanto, integrable) y :
$\underline{\int_0^1} f = \int_0^1 f = \int_0^1 f = 0$ □

Problema 5:

(a) Demuestre que:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{1/4}} + \frac{1}{e}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e^{1/4}}\right)$$
$$\text{Indicación: Considere la partición } P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

Identificamos:
$\Delta x_i = \frac{1}{2},\ x_i = \frac{i}{2},\ n = 2$
$m_i = f(x_i) = e^{-(\frac{i}{2})^2} = e^{-\frac{i^2}{4}}$
$Mi = f(x_{i-1}) = e^{-(\frac{i-1}{2})^2} = e^{-\frac{(i-1)^2}{4}}$

$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{2} e^{-\frac{i^2}{4}} . \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{4}} + e^{-1}\right)$
$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{2} e^{-\frac{(i-1)^2}{4}} . \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{4}} + 1\right)$

Luego, por defínción de suma inferior y superior:

$$s \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq S$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{e}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}\right)$$

(b) Demuestre que

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln(b) - \ln(a), \text{ donde } 0 < a < b$$
$$\text{Indicación: Considere la partición } x_i = aq^i, i = 0, 1, \ldots, n.$$

Respuesta:

Partamos definiendo cosas que nos seran utiles mas adelante. Vamos a considerar la paticion $x_i = aq^i$, tomando eso $x_n = b \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = q$ por lo tanto tambien podemos ver a q como $q = \exp\left(\ln\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)\right)$ y tomando $\alpha = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ tenemos que $q = \exp\left(\frac{\alpha}{n}\right)$

como como f(x) ($f(x) = \frac{1}{x}$) es continua en los R^+ se cumple que $M_i = \frac{1}{x_{i-1}}$ y $m_i = \frac{1}{x_i}$
por lo tanto:

$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{aq^i}\left(aq^i - aq^{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{q} = n\left(1 - \frac{1}{q}\right)$
$\therefore s(f, P) = n - \frac{n}{q}$

$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{aq^{i-1}}\left(aq^i - aq^{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{aq^{i-1}}\left(aq^i - aq^{i-1}\right) =$
$\sum_{i=1}^{n} q - 1 = nq - n$
$\therefore S(f, P) = nq - n$

por lo tanto gracias a que $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en [a, b]

$$s(f, P) \leqslant \int_b^b \frac{1}{x}dx \leqslant S(f, P)$$
$$n - \frac{n}{q} \leqslant \int_b^b \frac{1}{x}dx \leqslant nq - n$$
$$\text{pero como establecimos al inicio } q = \exp\left(\frac{\alpha}{n}\right)$$
$$n - n\exp\left(\frac{-\alpha}{n}\right) \leqslant \int_b^b \frac{1}{x}dx \leqslant n\exp\left(\frac{\alpha}{n}\right) - n$$

$$\lim_{n \to \infty} n - n\exp\left(\frac{-\alpha}{n}\right);\ u = \frac{\alpha}{n} \Rightarrow u \rightarrow 0$$
$$\lim_{u \to 0} \frac{\alpha}{u} - \frac{\alpha}{u}e^{-u} = \lim_{u \to 0} \alpha\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{ue^{-u}}\right) = \lim_{u \to 0} \frac{\alpha}{e^u}\left(\frac{e^u - 1}{u}\right) = \alpha$$

$$\lim_{n \to \infty} n\exp\left(\frac{\alpha}{n}\right) - n;\ u = \frac{\alpha}{n} \Rightarrow u \rightarrow 0$$
$$\lim_{u \to 0} \frac{\alpha}{u}(\exp(u)) - \frac{\alpha}{u} = \lim_{u \to 0} \alpha\frac{e^u - 1}{u} = \alpha$$

$$\text{en virtud del teorema del sandwich}$$
$$\alpha \leqslant \int_b^b \frac{1}{x}dx \leqslant \alpha$$
$$\int_b^b \frac{1}{x}dx = \alpha = \alpha = \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln(a)$$