Guía de Problemas Semana 9

Problema 1:

Sea $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ una función biyectiva y derivable en $(0,\infty)$.

Muestre que $g(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$, satisface que $g'(x) = f(x) + f'(x)x$.

Concluya que $g(x) = xf(x)$.

Desarrollo:

$$\text{PDQ}: \; g'(x) = f(x) + f'(x)x$$

$$\text{En efecto, tomando } g(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt\,,$$

$$\text{se tiene que } g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right) + \frac{d}{dx}\left(\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt\right)$$

$$\text{dado f derivable en } (0,\infty) \Longrightarrow \text{continua en } [0,\infty) \text{ se puede aplicar T.F.C.}$$

$$\text{por tanto se tiene } g'(x) = f(x) + f^{-1}(f(x))f'(x) = f(x) + xf'(x),$$

$$\text{por lo tanto al aplicar primitiva a ambos lados de la igualdad}:$$

$$\int g'(x)dx = \int f(x)dx + \int f'(x)x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \; g(x) = \int f(x)dx + \int f'(x)x\,dx\,, \text{ con } u = x \wedge v' = f'(x)$$

$$\Longrightarrow \; g(x) = \int f(x)dx + f(x)x - \int f(x)dx = f(x)x \qquad \square$$

Problema 2:

Considere la funcion $g(x)$ definida por $g(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}$, donde $\frac{\arctan(t)}{t}$ se define en cero por continuidad.

Demuestre que:

$$a)\int_0^1 g(x)dx = g(1) - \int_0^1 \arctan(t)dt$$

$$\text{(b) Utilizando lo anterior, muestre que}: \int_0^1 g(x)dx = g(1) - \frac{}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$$

a) $g(x)$ es R - integrable ya que es continua en el intervalo R^+ y $x > 0$, para ver si es continua en

$$x = 0\ ,\ \lim_{x \to 0^-} \frac{\arctan(x)}{x} \text{ por L`H } = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{1} = 1 \left(\text{mismo proceso para } 0^+\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan(x)}{x}$$

Por lo tanto tambien es continua en 0 con $g(0) = 1$

Ahora por integración por partes tomando como $u = g(x) \wedge dv = dt \Longrightarrow$

$$du = g`(x) = \frac{\arctan(x)}{x} \cdot x` - g(0) \cdot 0 = \frac{\arctan(x)}{x} \text{ por TFC 1 } \wedge v = x$$

Reemplazando y utilizando el teorema 4.6 del apunte quedaría

$$\int_0^x g(t)dt = g(t) \cdot t\Big|_0^x - \int_0^x t \cdot \frac{\arctan(t)}{t} dt$$

Tomando $x = 1$ $\int_0^1 g(x)dx = g(1) \cdot 1 - g(0) \cdot 0 - \int_0^1 \arctan(t)dt = g(1) - \int_0^1 \arctan(t)dt$

b) Utilizando lo anterior, muestre que: $\int_0^1 g(x)dx = g(1) - \frac{}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$.

usando lo anterior se tiene

$$\int_0^1 g(x)dx = g(1) - \int_0^1 \arctan(t)dt.$$

Hay que calcular $\int_0^1 \arctan(t)dt$

Utilizando integracion por partes con
$$u = \arctan(t) \qquad du = \frac{1}{1+t^2}$$
$$v = t \qquad dv = 1$$

$$\int_0^1 \arctan(t)dt = t\arctan(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt$$

observacion:

$\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt$, utilizando el cambio de variable $u = 1+t^2$ y $dt = \frac{du}{2t}$

$$\int_{1+0^2}^{1+1^2} \frac{tdu}{u2t} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}[\ln(2) - \ln(1)] = \frac{1}{2}\ln(2).$$

Por lo tanto:

$$\int_0^1 \arctan(t)dt = [\arctan(1) - 0\arctan(0)] - \frac{1}{2}\ln(2)$$

Utilizando lo obtenido de la parte (a):

$$\int_0^1 g(x)dx = g(1) - \left[\arctan(1) - \frac{1}{2}\ln(2)\right]$$

notar que $\arctan(1) = \frac{}{4}$

finalmente queda:

$$\int_0^1 g(x)dx = g(1) - \frac{}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)$$

Problema 3:

Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función biyectiva, diferenciable y tal que $g(0) = 0$. Sea $f: \mathbb{R} \to]-1, 1[$ una función diferenciable. Suponga que f y g satisfacen:

$$g(x) = \int_0^{g(x)} f^2\left(g^{-1}(x)\right) dx + f(x).$$

(a) Pruebe que $f(x) = \tanh(g(x))$

(b) Calcule la integral $\int_0^{x^3} (\tanh(t))^2 dt$

indicación: Observe que $f\left(g^{-1}(x)\right) = \tanh(x)$.

desarrollo:

a) Primero recordemos algunas indentidades de las funciones hiperbólicas:

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$$
$$\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$$
$$\tanh^1(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \text{ tal que } x \in (-1, 1)$$

Una vez teniendo en cuenta estas identidades derivemos $g(x)$:

En efecto:

$$g'(x) = \left(\int_0^{g(x)} f^2\left(g^{-1}(x)\right) dx\right) + f'(x)$$

Sabemos que f y g son funciones continuas y g es biyectiva

$\Longrightarrow f^2(g^{-1}(x)$ es continua y, por lo tanto, integrable.

Ahora, ocupando el TFC derivemos $g(x)$.

En efecto:

$$g'(x) = f^2\left(g^{-1}(g(x))\right) \cdot g'(x) + f'(x)$$
$$\Leftrightarrow g'(x) = f^2(x) \cdot g'(x) + f'(x)$$
$$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{f'(x)}{1 - f^2(x)}$$

Ahora, probemos a derivar $\tanh(x)$ y $\tanh^{-1}(x)$ para ver si podemos obtener alguna expresion similar a la anteriormente calculada.

Entonces, tenemos que:

$$(\tanh(x))' = \frac{(\operatorname{senh}(x))'}{(\cosh(x))'} = \frac{\operatorname{senh}^2(x) - \cosh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

Ahora probemos con $\tanh^{-1}(x)$:

$$\left(\tanh^{-1}(x)\right)' = \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \left(\frac{(1-x) - (-1 \cdot (1+x))}{(1-x)^2}\right),$$

$$= \frac{1-x}{2(1+x)} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

Si tomamos $1 = (x)´$:

$$\left(\tanh^{-1}(x)\right) = \frac{(x)´}{1-x^2}, \text{ tal que } x \in (-1, 1)$$

Ahora, como sabemos por enunciado que $Cod(f) = (-1, 1)$ podemos sustituir x por $f(x)$ en la expresion anterior:

$$\Longrightarrow (\tan^{-1}(f(x)) = \frac{f(x)´}{1-f^2(x)}$$

Este resultado nos indica que tanto $g(x)$ como $\tan^{-1}(fx))$ son primitivas de $g´(x)$, pero no sabemos si son iguales, por lo que podemos decir que difieren en una constante $c \in \Re$ tal que: $c = g(x) - \tanh^{-1}(f(x))$

Ahora ocupando el hecho de que $g(0) = 0$:

$$g(0) = \int_0^{g(0)} f^2\left(g^{-1}(x)\right)dx + f(0) = 0$$
$$= 0 + f(0) = 0$$
$$\Longrightarrow f(0) = 0 = g(0)$$

Ahora ocupemos este resultado en la ecuacion de c:

$$c = g(0) - \tanh^{-1}(f(0)) = 0 - \tanh^{-1}(0) = 0$$
$$\Longrightarrow g(x) = \tanh^{-1}(f(x))$$
$$\text{componiendo con } \tanh():$$
$$\Longrightarrow \tanh(g(x)) = f(x)$$

b) Calcular $\int_0^{x^3} (\tanh(t))^2 dt$:

Ocupando la indicacion dada tenemos que $\tanh^2(t) = f^2\left(g^{-1}(t)\right)$, ahora si reemplazamos $g(x) = x^3$:

$$\Longrightarrow \int_0^{x^3} \tanh^2(t)dt = \int_0^{g(x)} f^2\left(g^{-1}(t)\right)dt$$

Utilizando (a) tenemos que:

$$\int_0^{g(x)} f^2\left(g^{-1}(x)\right)dx = g(x) - f(x)$$

Aplicando la igualdad anteriormente dada:

$$\int_0^{g(x)} f^2\left(g^{-1}(x)\right)dx = \int_0^{g(x)} \tanh^2(t) = g(x) - f(x) = g(x) - \tanh(g(x))$$

como $g(x) = x^3$:

$$\Longrightarrow x^3 - \tanh\left(x^3\right)$$

Problema 4:

Sea $f(x) := \int_1^x x \ln(tx)\, dt$, definida en $]0, +\infty[$

(a) Encuentre $\int \ln(t)$ y calcule f(2).

Desarrollo:

$\int \ln(t) = x\ln(x) - x$ y $f(2) = 2\int_1^2 \ln(2t)dt$. Tomando $u = 2t$, $du = 2dt$, queda que:

$= \int \ln(u)\, du = u\ln(u) - u \Big|_2^4 = 4\ln(4) - 4 - (2\ln(2) - 2) = 4\ln(4) - 4 - 2\ln(2) + 2$

$= 4\ln(4) - 2\ln(2) - 2 = 8\ln(2) - 2\ln(2) - 2 = \ln(64) - 2.$

(b) Demuestre que $f'(x) = (4x - 1)\ln(x)$, $\forall x \in]0, +\infty[$.

Desarrollo:

$\int_{t=1}^{t=x} x\ln(tx)\, dt$, tomando $u = tx$ y $du = xdt$, se tiene que:

$f(x) = \int_x^{x^2} \ln(u)\, du \implies f(x) = x^2\ln\left(x^2\right) - x^2 - x\ln x + x = \left(2x^2 - x\right)\ln(x) + x - x^2$

Por lo que: $f'(x) = (4x - 1)\ln(x) + \dfrac{\left(2x^2 - x\right)}{x} + 1 - 2x = (4x - 1)\ln(x) + 2x - 1 + 1 - 2x =$

$(4x - 1)\ln(x)$.

Por lo que queda demostrado.

Problema 5:

Asumiendo que la función $g(t) = \text{arc sen}(\text{arc tan}(t))$ es continua en $[0, \tan(1)]$ encuentre la derivada de la función

$f(x) = \int_0^{\tan(x)} \text{arc sen}(\text{arc tan}(t))\, dt$ para x [0,1]

Desarrollo:

Por TFC y composición de funciones, se tiene lo siguiente:

$f'(x) = F(x)\,(\tan(x))' = \text{arc sen}(\text{arc tan}(\tan(x)))\sec^2(x) = \text{arc sen}(x)\sec^2(x)$

Problema 6:

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable, verificando que $f((a+b) - x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

a) Probar que $\int_a^b x f(x) = \dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)$

definimos $I = \int_a^b x f(x)\, dx$ cambio de variable $x = a + b - u$ $dx = -du$

x=b → u =a

x=a → u =b

$$I = -\int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)du$$

$$I = \int_a^b (a+b-u)f(a+b-u)du$$

por la propiedad dada :

$$I = \int_a^b (a+b-u)f(u)\, du$$

$$I = \int_a^b (a+b)f(u)\, du \; - \int_a^b uf(u)\, du$$

$$\text{pero} \int_a^b uf(u)du \;= I$$

$$I = \int_a^b (a+b)f(u)\, du \; - \; I$$

$$I + I = \int_a^b (a+b)f(u)du$$

$$2I = \int_a^b (a+b)f(u)du$$

$$I = \frac{(a+b)}{2}\int_a^b f(u)du$$

y como u es variable muda

$$I = \frac{(a+b)}{2}\int_a^b f(x)dx$$

b) Sea ahora $g : [-1, 1] \to R$ continua, pruebe que $\int_0 xg(\sin(x)) = \frac{}{2}\int_0 g(\sin(x))$

usando la propiedad de a), pues $\sin(x) = \sin(\; - x) \Longrightarrow g(\sin(x)) = g(\sin(\; - x))$

$$\int_0 xg(\sin(x)) = \frac{0 +}{2}\int_0 g(\sin(x)) = \frac{}{2}\int_0 g(\sin(x))$$

c) Deduzca que $\int_0 \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)} = \frac{}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}$ y calcule el valor de la integral.

usando la propiedad de b)

$$\int_0 \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \frac{}{2}\int_0 \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx \Longrightarrow \text{usamos cambio de variable}$$

cambio de variable $u = \cos(x)$ $du = -\sin(x)\,dx$ limite superior $u= \cos( ) = -1$

limite inferior $u= \cos(0) = 1$

$$\frac{-}{2}\int_1^{-1} \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{}{2}(\arctan(1) - \arctan(-1))$$