MA1002-5 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Álvaro Hernández
Auxiliar: Luciano Avegno Cepeda

Resumen Control 2

0.1. Subsucesiones

Definición 1 (Subsuceción)**.** *Sea s_n una sucesión, sea $\varphi : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ una función estríctamente creciente. Se llama subsuceción de s_n generada por ϕ a la sucesión u_n definidad por:*

$$u_n = s_{\varphi(n)}$$

Teorema 1. *Sea s_n una sucesión y sea $l \in \mathrm{R}$, entonces:*

$s_n \to l \iff$ *todas las subseciones de $s_n$convergen a l*

Teorema 2 (Bolszano-Weierstrass)**.** *Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.*

Propiedad 1.

$$s_n \to \bar{x} \Rightarrow f(s_n) \to f(\bar{x})$$

Definición 2 (Función Continua)**.** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \bar{x} \in A$, diremos que f es continua. De forma no DIM, una función continua es aquella que al graficarla no debes levantar el lápiz para dibujarla*

Definición 3 (Función Continua en un Punto)**.** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Diremos que f es una función continua en $\bar{x}$ si:*

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \bar{x} \Longrightarrow f(x_n) \to f(\bar{x})$$

Teorema 3 (Álgebra de funciones continuas)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Las siguientes funciones resultan ser continuas en $\bar{x}$:*

- $f + g$
- $f - g$
- λf, *con* $\lambda \in \mathrm{R}$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$ *cuando* $g(\bar{x}) \neq 0$

Teorema 4 (Composición de Funciones Continuas)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones. Si f es continua en $\bar{x} \in A$ y g es continua en $f(\bar{x}) \in B$, entonces la función $g \circ f$ es continua en $\bar{x}$*

Teorema 5 (Caracterización $\epsilon - \delta$)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Y $\bar{x} \in A$. f es continua en $\bar{x}$ si y solo si se cumple que:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, |x - \bar{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$$

Teorema 6 (Valor Intermedio)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe un $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$*

Teorema 7. *Sea $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ una función continua, si $c, d \in f([a, b])$ entonces para todo número e comprendido entre c y d, existe $x \in [a, b]$, tal que $f(x) = e$*

Teorema 8 (Teorema de Weierstrass)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.*

Teorema 9. *Sea $f : I \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ continua y estrictamente monótona con I un intervalo, entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.*

Definición 4. *La función $f : A \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ se dice uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que:*

$$(\forall x, y \in A)|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Teorema 10. *Sea $f : A \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua si y solo si es continua en todo punto $\bar{x} \in A$*

0.2. Derivadas

Definición 5. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diremos que f es derivable o diferenciable en $x_0 \in IntA$ si y solo si el siguiente límite existe:*

$$lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

En tal caso, el valor del límite se denominará derivada de f en x_0 y se denotará por $f'(x_0)$.

Definición 6. *Diremos que $f : (a,b) \to \mathrm{R}$ es derivable en el punto $\bar{x} \in (a,b)$ si existe el límite:*

$$lim_{x\to\bar{x}}\frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}}$$

Este límite se denota como $f`(\bar{x})$ o bien $\frac{df}{dx}\bar{x}$ y se llama derivada de f en $\bar{x}$.

Teorema 11. *Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ derivable en $\bar{x} \in (a,b)$ y $g : (c,d) \to \mathrm{R}$ derivable en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c,d)$, así $g \circ f$ es derivable en $\bar{x}$ con:*

$$(g\circ f)`(\bar{x}) = g`(f(\bar{x}))\cdot f`(\bar{x})$$

Teorema 12. *Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ biyectiva y continua, Si f es diferenciable en $\bar{x} \in (a,b)$ con $f`(\bar{x} \neq 0)$, entonces la función inversa $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ es derivable en $\bar{y} = f(\bar{x})$ con:*

$$(f^{-1})(\bar{y}) = \frac{1}{f`(\bar{x})} = \frac{1}{f`(f^{-1}(\bar{y}))}$$

Teorema 13. *Si $\bar{x} \in (a,b)$ es mínimo local o máximo locas de una función derivable $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(\bar{x}) = 0$*

Teorema 14 (Valor Medio)**.** *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces, exste $\varepsilon \in (a,b)$ tal que:*

$$[f(b)-f(a)]g'(\varepsilon) = [g(b)-g(a)]f'(\varepsilon)$$

Teorema 15 (Regla de L'Hopital)**.** *Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en (a,b), tales que:*

$$lim_{x\to a^+}f(x) = lim_{x\to a^+}g(x) = L$$

con $L = 0$ o $L = \infty$ y $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$ entonces:

$$lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Siempre que este último límite exista

Teorema 16. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$, entonces f es creciente en $[a,b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonía es igualmente estricta.*

Teorema 17. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces f es convexa en $[a,b]$ si y solo si f' es creciente en (a,b)*

Ejemplo 1 (Derivadas Conocidas)**.**

$$(k)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(ax^n)' = nax^{n-1}$$

$$(ln(x))' = \frac{x'}{x} = \frac{1}{x}$$

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\alpha^x)' = ln(\alpha)\alpha^x x' = ln(\alpha)\alpha^x$$

$$(log_\alpha(x))' = \frac{1}{ln(\alpha)x}$$

$$(sen(x))' = cos(x)$$

$$(cos(x))' = -sen(x)$$

$$(tan(x))' = sec^2(x)$$

$$(sec(x))' = sec(x)tan(x)$$

$$(cot(x))' = -cosec^2(x)$$

$$(cosec(x))' = -cosec(x)cot(x)$$

$$(arcsen(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

Teorema 18 (Álgebra de Derivadas)**.** *Si f, g son diferenciables en x_0 y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces las sisguiente operaciones son diferenciables y tienen como resultado:*

- $(f \pm g)' = f \pm g'$

- $(\alpha f)' = \alpha f'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Teorema 19. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in Int(A)$. La función f es diferenciable en x_0 si y solo si una constante real m y una función $E : [-\delta, 0) \cup (0, \delta] \to \mathbb{R}$ con $\delta > 0$ y $lim_{h\to 0} E(h) = 0$ tales que:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + hE(h), \forall h \in [-\delta, 0) \cup (0, \delta]$$

Teorema 20 (Regla de la Cadena)**.** *Si f y g son funciones diferenciables entonces la regla de la cadena expresa la derivada de la composición $f \circ g$ en términos de la derivada de f y g el producto de funciones como:*

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

Teorema 21. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, k-veces derivable en $\bar{x} \in (a, b)$ y sea:*

$$T_f^k(h) := f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{f''(\bar{x})}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{k!}h^k$$

su dearrollo de Taylor de orden k en torno a $\bar{x}$. Entonces:

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + o((x - \bar{x})^k)$$

Con $lim_{h\to 0} o\frac{h^k}{h^k} = 0$

Teorema 22 (Fórmula de Taylor)**.** *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(k + 1)$-veces derivable en todo punto del intervalo (a, b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de Taylor de orden k en $\bar{x} \in (a, b)$. Entonces, para todo $x > \bar{x}$ existe $\xi \in (\bar{x}, x)$ tal que:*

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k + 1)!}(x - \bar{x})^{k+1}$$

0.3. Primitivas

Definición 7 (Primitiva)**.** *Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $Int(I)$, se llama primitiva de una función f sobre I si y solo si:*

$$\forall x \in Int(I), F'(x) = f(x)$$

Observación 1 (Primitivas Conocidas)**.** *Las siguientes primitivas pueden ser conocidas como significativas:*

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \forall n \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c$
3. $\int sen(x)dx = -cos(x) + c$
4. $\int cos(x)dx = sen(x) + c$
5. $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$
6. $\int senh(x)dx = cosh(x) + c$
7. $\int cosh(x)dx = senh(x) + c$
8. $\int sec^2(x)dx = tan(x) + c$
9. $\int cosec^2(x)dx = -cotan(x) + c$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctan(x) + c$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsen(x) + c$
12. $\int \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1 - x^2} + c$

Observación 2. *Podemos aclarar lo siguiente:*

1. $\int f'(x)dx = f(x) + c$
2. $\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$

Proposición 1. *$\int$ es un operador lineal, entonces:*

1. $\int f \pm g = \int f \pm$
2. $\int \alpha f = \alpha \int f$

Teorema 23 (Cambio de Variable)**.** *Si $u = g(x)$, entonces:*

$$\int f = \int (f \circ g) \cdot g'$$

Proposición 2 (Integración por Partes)**.** *Sean u y v dos funciones de x, entonces:*

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Donde $dv = v'(x)dx$ y $du = u'(x)dx$, para recordar la fórmula tenemos la siguiente frase "Sentado Un Día Vi Una Vaca Sentada Vestida De Uniforme"

Observación 3. *Cuando en una integral figuren expresiones del tipo que se indica, los siguientes cambios de variable son convenientes:*

1. *Para* $a^2 + x^2$,*usar* $x = atan(v)$ *o bien* $x = asenh(t)$

2. *Para* $a^2 - x^2$, *usar* $x = asen(v)$ *o bien* $x = acos(v)$

3. *Para* $x^2 - a^2$, *usar* $x = asec(v)$ *o bien* $x = acosh(t)$

Observación 4. *Considernado la integral del tipo:*

$$\int R(sen(x), cos(x))dx$$

En donde R es una función racional en la cual se operan solo sen(x) y cos(x) se aconseja el cambio de variable $t = tan(\frac{x}{2})$

0.4. Sumatorias de Riemann

Definición 8. *Sea E un conjunto de puntos del plano 0XY. El área del conjunto E será un número real A(E) que cumple las siguientes condiciones:*

- $A(E) \geq 0$
- $E \subseteq F \Rightarrow A(E) \leq A(F)$
- *Si* $E \cap F = \emptyset \Rightarrow A(E \cup F) = A(E) + A(F)$
- *El área de una región rectangular E de lados a y b es* $A(E) = a \cdot b$

Definición 9 (Partición de un Intervalo). *El conjunto* $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *es una partición del intervalo* $[a, b]$ *si* $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. *Si P es una partición de* $[a, b]$ *se llama norma de P y se denota por* $|P|$ *al real:*

$$|P| = max\{(x_i - x_{i-1}) : i = 1, ..., n\}$$

Definición 10 (Sumas Superiores e Inferiores). *Sea f una función definida y acotada en* $[a, b]$[1]. *Sea* $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *una partición de* $[a, b]$. *Como f es acotada en* $[a, b]$ *también lo es en cada intervalo* $I_i = [x_{i-1}, x_i] \forall i = 1, ..., n$ *luego podemos definit:*

$$m_i(f) = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i(f) = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Con esto se definen las siguientes sumas:

1. $S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1})$ *se llama suma superior de f correspondiente a la partición P.*

2. $s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$ *se llama suma inferior de f correspondiente a la partición P.*

Definición 11 (Integrales Superiores e Inferiores). *Sea* $\mathcal{P}_{[a,b]}$ *el conjunto de todas las particiones de* $[a, b]$. *Sea f una función definida y acotada sobre* $[a, b]$. *Los números reales:*

$$\int_{-a}^{b} = sup\{s(f, P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$$

$$\int_{a}^{-b} f = inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$$

Se llama integral inferior de f en $[a, b]$ *e integral superior de f en* $[a, b]$ *respectivamente*

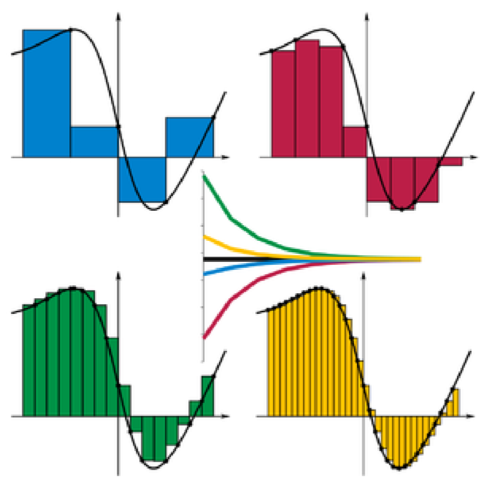

Figura 1: Cuatro de los métodos de suma de Riemann para aproximar el área bajo las curvas

Fórmula 1 (Integrabilidad de Riemann).

$$\lim_{n\to n} .\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Definición 12 (Refinamiento de una Partición o Partición Más Fina). *Sean P y Q dos particiones de* $[a, b]$ *si* $P \subseteq Q$ *diremos que Q es un refinamiento P o una partición más fina que P.*

Proposición 3. *Si* $P \subseteq Q$ *entonces:*

$$s(f, P) \leq s(f, Q)$$

$$S(f, P) \geq S(f, Q)$$

Definición 13. *Diremos que una función f definida y acotada en* $[a, b]$ *es integrable según Riemann si se cumple que* $\int_{-a}^{b} f = \int_{a}^{-b} f$, *en tal caso, el valor común de estas dos integrales se llaman simplemente la integral de f en* $[a, b]$ *y se denota por* $\int_{a}^{b} f$

Teorema 24 (Condición de Riemann)**.** *Una función f definida y acotada en un intervalo $[a,b]$ es Riemann-integrable en $[a,b]$ si y solo si:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]})S(f,P)s(f,P) < \epsilon$$

Proposición 4. *Si f es una función definida, acotada y monótona en $[a,b]$, entonces es integrable en $[a,b]$*

Teorema 25. *Si f es una función continua en $[a,b]$ entonces es integrable en $[a,b]$*

Corolario 1. *Si f es continua en $[a,b]$, entonces:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]})\{|P| \leq \delta \Rightarrow$$

$$|\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x_i})(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f| \leq \epsilon\}$$

Lema 1. *Si f es una función integrable en $[a,b], a < b$ y $[r,s] \subseteq [a,b]$ con $r < s$, entonces f es integrable en $[r,s]$*

Lema 2. *Si f está definida y es acotada en $[a,b], a < b$ y $c \in (a,b)$ entonces:*

$$\int_{-a}^{b} f \geq \int_{-a}^{c} f + \int_{-c}^{b} f$$

$$\int_{-a}^{b} f \leq \int_{a}^{-c} f + \int_{c}^{-b}$$

Lema 3. *Si f y g son dos funciones definidas y acotadas en $[a,b], a < b$, entonces:*

$$\int_{-a}^{b} f + \int_{-a}^{b} g \leq \int_{-a}^{b} (f+g)$$

$$\int_{a}^{-b} (f+g) \leq \int_{a}^{-b} f + \int_{a}^{-b} g$$

Teorema 26 (Propiedades de la Integral)**.** *Notamos lo siguiente:*

1. *Si $c \in \mathbb{R}$ entonces $\int_a^b c = c(b-a)$*
2. *Si f es integrable en $[a,b]$ y $c \in (a,b)$ entonces f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ y además:*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

3. *Si f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$ entonces f es integrable en $[a.b]$ y:*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

4. *Si f y g son funciones integrables en $[a,b]$ entonces $(f+g)$ es integrable en $[a,b]$ y:*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b f$$

5. *Si f es una función integrable en $[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces (αf) es integrable en $[a,b]$ y:*

$$\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f$$

6. *Si f y g son integrables en $[a,b]$ y $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a,b]$ entonces:*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

7. *Si f es integrable en $[a,b]$ entonces $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y:*

$$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$$

Definición 14. *Sea f una función integrable en un intrvalo $[p,q]$. Si $a, b \in [p,q]$ son tales que $a \geq b$ entonces se define la integral de a a b del modo siguiente:*

$$\int_a^b f = -\int_b^a f \ \text{si } a > b, o$$

$$\int_a^b f = 0 \ \text{si } a = b$$

Proposición 5. *Sean f y g integrales en $[p,q]$ y $a, b \in [p,q]$ entonces:*

1. $\int_a^b \alpha = \alpha(b-a), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \forall c \in [p,q]$
3. $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
5. $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [p,q] \Rightarrow |\int_a^b f| \leq |\int_a^b g|$
6. $|\int_a^b f| \leq |\int_a^b |f||$

0.5. Teorema Fundamental del Cálculo

Proposición 6. *Sea f una función integrable en $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Entonces la función G definida por:*

$$G(x) = \int_a^x f$$

es continua en $[a,b]$.

Teorema 27 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$ entonces la función G está definida por:*

$$G(x) = \int_a^x f$$

Es derivable en $int(I)$ y además $G' = f$ en $int(I)$.

Corolario 2. *Si la función F es continua en I, es una primitiva f en I, entonces:*

$$\forall a, b \in I, \int_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema 28 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea f integrable en $[a,b]$. Si existe una función F continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $F' = f$ en (a,b), entonces:*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Teorema 29. *Sean f y g son dos funciones conitnuas en un intervalo I y diferenciables en $int(I)$. Sean $a, b \in int(I)$. Si f' y g' son continuas entonces:*

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

Teorema 30. *Sea g una función continua en un intervalo I y derivable en $int(I)$ con g' continua. Sean $a, b \in int(I)$, con $a < b$. Sea f una función continua en $g([a,b])$, entonces:*

$$\int_a^b (f \circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f$$

Definición 15 (Valor Medio de una Función)**.** *Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$. Se llama valor medio de f en $[a,b]$ al número real:*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

A este real se le anota $\bar{f}$ o. bien $< f >$

Teorema 31 (Valor Medio para Integrales)**.** *Si f es continua en $[a,b]$ entonces $\exists \xi \in (a,b)$ tal que $f(\xi) =< f >$, es decir:*

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$$

Teorema 32 (Valor Medio Generalizado para Integrales)**.** *Si f es continua en $[a,b]$ y g es una función integrable en $[a,b]$ que no cambia de signo, entonces $\exists \xi \in [a,b]$ tal que:*

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g$$

Teorema 33 (Taylor con Resto Integral)**.** *Se calcula con la siguiente fórmula:*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

Llamaremos al término:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

como el resto integral del desarrollo de Taylor.