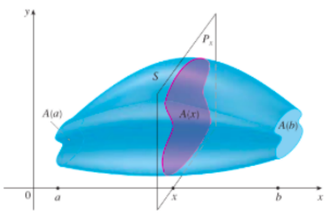
MA1002-5 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Álvaro Hernández
Auxiliar: Luciano Avegno Cepeda

Resumen Control 2

Volumen de un sólido mediante sección transversal:

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Donde $A(x)$ es el área de la sección transversal:



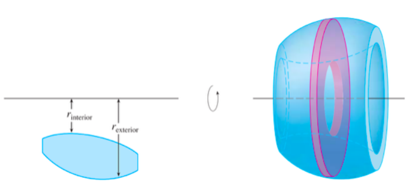
Método de los Anillos: Volumen de un sólido de revolución, hacemos girar los radios:

$$y_1 = r_{exterior}(x)$$

$$y_2 = r_{interior}(x)$$

Al rededor del eje X:

$$V = \int_a^b \pi(r_e^2(x) - r_i^2(x))dx$$



En forma análoga hacemos girar los radios:

$$x_1 = r_e(y)$$

$$x_2 = r_i(y)$$

AL rededor del eje Y:

$$V = \int_c^d \pi(r_e^2(y) - r_i^2(y))dy$$

Definición 1 (Integral Impropia de Primera Especie (Intervalo no Acotado))**.** *Sea* $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *diremos que* f *es integrable en* $[a, +\infty)$ *si se cumple que:*

1. $\forall x \in (a, +\infty), f$ *es integrable en* $[a, x]$.
2. *Existe el límite definido por:*

$$lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$$

Notación 1. *Si una función es integrable en el intervalo* $[a, \infty)$ *entonces al valor del límite se le llama integral impropia de primera especie de* f *y se le denota:*

$$\int_a^{+\infty} f = lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$$

Definición 2 (Integral Impropia de Segunda Especie (Funciones no Acotadas))**.** *Sea* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *una función no acotada, diremos que* f *es integrable en* $[a, b)$ *si y solo si:*

1. $\forall x \in (a, b), f$ *es integrable en* $[a, x]$
2. *El límite* $lim_{x\to b^-} \int_a^x f$ *existe.*

Definición 3 (Integrales Impropias de Tercera Especie o Mixtas)**.** *Son las que se obtienen combinando integrales impropias de primera y segunda especie. Por ejemplo:*

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0^-} \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

Este tipo de integral será convergente si y solo si cada una de sus componentes es una integral convergente.

Teorema 1 (Criterio de Comparación)**.** *Sean* f *y* g *funciones continuas en* $[a, +\infty)$ *tales que:*

$$(\exists b \geq a)(\forall x \geq b), 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

entonces si $\int_a^{+\infty} g$ *converge entonces* $\int_a^{+\infty} f$ *converge. Recíprocamente si* $\int_a^{+\infty} f$ *diverge, entonces* $\int_a^{+\infty} g$ *diverge.*

Teorema 2 (Criterio del Cuociente de Funciones). *Sean f y g funciones continuas en $[a, +\infty)$ y no negativas en $[b, +\infty)$, donde $b \geq a$ y tales que:*

$$lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

Entonces las integrales impropias $\int_a^{+\infty} f$ y $\int_a^{+\infty} g$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Definición 4 (Convergencia Absoluta). *Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, diremos que $\int_a^{+\infty} f$ es absolutamente convergente si $\int_a^{\infty} |f|$ converge.*

Teorema 3. *Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$,se tiene que:*

$$\int_a^{+\infty} f \text{ converge absolutamente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge}$$