Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Resumen Cálculo Diferencial e Integral

MA1002

Auxiliar: Luciano Avegno C.
Profesor: Álvaro Hernandez

Índice general

0.1. Subsucesiones

Definición 0.1 Subsuceción

Sea s_n una sucesión, sea $\varphi : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ una función estríctamente creciente. Se llama subsuceción de s_n generada por ϕ a la sucesión u_n definidad por:

$$u_n = s_{\varphi(n)}$$

Teorema 1. *Sea s_n una sucesión y sea $l \in \mathrm{R}$, entonces:*

$$s_n \to l \iff \textit{todas las subseciones de } s_n \textit{convergen a } l$$

Teorema 2 (Bolszano-Weierstrass)**.** *Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.*

Propiedad 1.

$$s_n \to \bar{x} \Rightarrow f(s_n) \to f(\bar{x})$$

Definición 0.2 Función Continua

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \bar{x} \in A$, diremos que f es continua. De forma no DIM, una función continua es aquella que al graficarla no debes levantar el lápiz para dibujarla

Definición 0.3 Función Continua en un Punto

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Diremos que f es una función continua en $\bar{x}$ si:

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \bar{x} \Longrightarrow f(x_n) \to f(\bar{x})$$

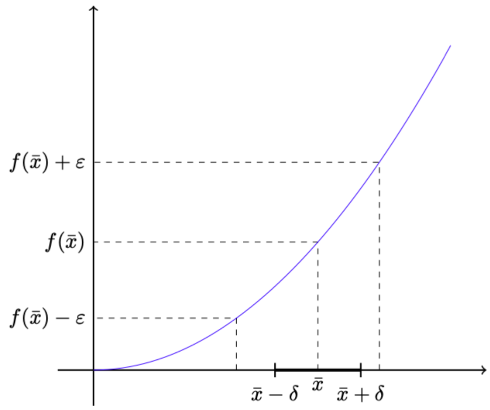
Teorema 3 (Álgebra de funciones continuas)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Las siguientes funciones resultan ser continuas en $\bar{x}$:*

- $f + g$
- $f - g$
- λf, *con* $\lambda \in \mathrm{R}$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$ *cuando* $g(\bar{x}) \neq 0$

Teorema 4 (Composición de Funciones Continuas)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones. Si f es continua en $\bar{x} \in A$ y g es continua en $f(\bar{x}) \in B$, entonces la función $g \circ f$ es continua en $\bar{x}$*

Teorema 5 (Caracterización $\epsilon - \delta$)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Y $\bar{x} \in A$. f es continua en $\bar{x}$ si y solo si se cumple que:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, |x - \bar{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$$



0.2. Continuidad

Teorema 6 (Valor Intermedio)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe un $\bar{x} \in [a,b]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$*

Teorema 7. *Sea $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ una función continua, si $c, d \in f([a,b])$ entonces para todo número e comprendido entre c y d, existe $x \in [a,b]$, tal que $f(x) = e$*

Teorema 8 (Teorema de Weierstrass)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a,b]$.*

Teorema 9. *Sea $f : I \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ continua y estrictamente monótona con I un intervalo, entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.*

Definición 0.4

La función $f : A \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ se dice uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$(\forall x, y \in A)|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Teorema 10. *Sea $f : A \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua si y solo si es continua en todo punto $\bar{x} \in A$*

0.3. Derivadas

Definición 0.5

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diremos que f es derivable o diferenciable en $x_0 \in IntA$ si y solo si el siguiente límite existe:

$$lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

En tal caso, el valor del límite se denominará derivada de f en x_0 y se denotará por $f'(x_0)$.

Definición 0.6

Diremos que $f : (a, b) \to \mathrm{R}$ es derivable en el punto $\bar{x} \in (a, b)$ si existe el límite:

$$lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

Este límite se denota como $f`(\bar{x})$ o bien $\frac{df}{dx}\bar{x}$ y se llama derivada de f en $\bar{x}$.

Teorema 11. *Sea $f : (a, b) \to (c, d)$ derivable en $\bar{x} \in (a, b)$ y $g : (c, d) \to \mathrm{R}$ derivable en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c, d)$, así $g \circ f$ es derivable en $\bar{x}$ con:*

$$(g \circ f)`(\bar{x}) = g`(f(\bar{x})) \cdot f`(\bar{x})$$

Teorema 12. *Sea $f : (a, b) \to (c, d)$ biyectiva y continua, Si f es diferenciable en $\bar{x} \in (a, b)$ con $f`(\bar{x} \neq 0)$, entonces la función inversa $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ es derivable en $\bar{y} = f(\bar{x})$ con:*

$$(f^{-1})(\bar{y}) = \frac{1}{f`(\bar{x})} = \frac{1}{f`(f^{-1}(\bar{y}))}$$

0.4. Teoremas sobre Derivación

Teorema 13. *Si $\bar{x} \in (a, b)$ es mínimo local o máximo locas de una función derivable $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(\bar{x}) = 0$*

Teorema 14 (Valor Medio)**.** *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces, exste $\varepsilon \in (a, b)$ tal que:*

$$[f(b) - f(a)]g'(\varepsilon) = [g(b) - g(a)]f'(\varepsilon)$$

Teorema 15 (Regla de L'Hopital)**.** *Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables en (a, b), tales que:*

$$lim_{x \to a^+} f(x) = lim_{x \to a^+} g(x) = L$$

con $L = 0$ o $L = \infty$ y $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ entonces:

$$lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Siempre que este último límite exista

Teorema 16. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces f es creciente en $[a, b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonía es igualmente estricta.*

Teorema 17. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces f es convexa en $[a, b]$ si y solo si f' es creciente en (a, b)*

Ejemplo 1 (Derivadas Conocidas)**.**

$$(k)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$(ax^n)' = nax^{n-1}$$
$$(ln(x))' = \frac{x'}{x} = \frac{1}{x}$$
$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(\alpha^x)' = ln(\alpha)\alpha^x x' = ln(\alpha)\alpha^x$$
$$(log_\alpha(x))' = \frac{1}{ln(\alpha)x}$$
$$(sen(x))' = cos(x)$$
$$(cos(x))' = -sen(x)$$
$$(tan(x))' = sec^2(x)$$
$$(sec(x))' = sec(x)tan(x)$$
$$(cot(x))' = -cosec^2(x)$$
$$(cosec(x))' = -cosec(x)cot(x)$$
$$(arcsen(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

Teorema 18 (Álgebra de Derivadas)**.** *Si f, g son diferenciables en x_0 y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces las sisguiente operaciones son diferenciables y tienen como resultado:*

- $(f \pm g)' = f \pm g'$
- $(\alpha f)' = \alpha f'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Teorema 19. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in Int(A)$. La función f es diferenciable en x_0 si y solo si una constante real m y una función $E : [-\delta, 0) \cup (0, \delta] \to \mathbb{R}$ con $\delta > 0$ y $lim_{h\to 0}E(h) = 0$ tales que:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + hE(h), \forall h \in [-\delta, 0) \cup (0, \delta]$$

Teorema 20 (Regla de la Cadena)**.** *Si f y g son funciones diferenciables entonces la regla de la cadena expresa la derivada de la composición $f \circ g$ en términos de la derivada de f y g el producto de funciones como:*

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

Teorema 21. *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, k-veces derivable en $\bar{x}\in(a,b)$ y sea:*

$$T_f^k(h) := f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{f''(\bar{x})}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{k!}h^k$$

su dearrollo de Taylor de orden k en torno a $\bar{x}$. Entonces:

$$f(x) = T_f^k(x-\bar{x}) + o((x-\bar{x})^k)$$

Con $lim_{h\to 0} o\frac{h^k}{h^k} = 0$

Teorema 22 (Fórmula de Taylor)**.** *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R},(k+1)$-veces derivable en todo punto del intervalo (a,b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de Taylor de orden k en $\bar{x}\in(a,b)$. Entonces, para todo $x>\bar{x}$ existe $\xi\in(\bar{x},x)$ tal que:*

$$f(x) = T_f^k(x-\bar{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x-\bar{x})^{k+1}$$

0.5. Primitivas

Definición 0.7 Primitiva

Una función F continua en un intervalo $I\subseteq\mathbb{R}$ y derivable en $Int(I)$, se llama primitiva de una función f sobre I si y solo si:

$$\forall x\in Int(I), F'(x) = f(x)$$

Observación 1 (Primitivas Conocidas)**.** *Las siguientes primitivas pueden ser conocidas como significativas:*

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \forall n \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c$
3. $\int sen(x)dx = -cos(x) + c$
4. $\int cos(x)dx = sen(x) + c$
5. $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$
6. $\int senh(x)dx = cosh(x) + c$
7. $\int cosh(x)dx = senh(x) + c$
8. $\int sec^2(x)dx = tan(x) + c$
9. $\int cosec^2(x)dx = tan(x) + c$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctan(x) + c$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsen(x) + c$
12. $\int \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + c$

Observación 2. *Podemos aclarar lo siguiente:*

1. $\int f'(x)dx = f(x) + c$

2. $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$

Proposición 1. $\int$ *es un operador lineal, entonces:*

1. $\int f \pm g = \int f \pm$

2. $\int \alpha f = \alpha \int f$

Teorema 23 (Cambio de Variable)**.** *Si* $u = g(x)$*, entonces:*

$$\int f = \int (f \circ g) \cdot g'$$

Proposición 2 (Integración por Partes)**.** *Sean* u *y* v *dos funciones de* x*, entonces:*

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Donde $dv = v'(x)dx$ *y* $du = u'(x)dx$*, para recordar la fórmula tenemos la siguiente frase "Sentado Un Día Vi Una Vaca Sentada Vestida De Uniforme"*

Observación 3. *Cuando en una integral figuren expresiones del tipo que se indica, los siguientes cambios de variable son convenientes:*

1. *Para* $a^2 + x^2$*,usar* $x = atan(v)$ *o bien* $x = asenh(t)$

2. *Para* $a^2 - x^2$*, usar* $x = asen(v)$ *o bien* $x = acos(v)$

3. *Para* $x^2 - a^2$*, usar* $x = asec(v)$ *o bien* $x = acosh(t)$

Observación 4. *Considernado la integral del tipo:*

$$\int R(sen(x), cos(x))dx$$

En donde R es una función racional en la cual se operan solo sen(x) y cos(x) se aconseja el cambio de variable $t = tan(\frac{x}{2})$

0.6. Semana 7: Integrales de Riemann

Definición 0.8

Sea E un conjunto de puntos del plano 0XY. El área del conjunto E será un número real A(E) que cumple las siguientes condiciones:

- $A(E) \geq 0$
- $E \subseteq F \Rightarrow A(E) \leq A(F)$

- Si $E \cap F = \emptyset \Rightarrow A(E \cup F) = A(E) + A(F)$
- El área de una región rectangular E de lados a y b es $A(E) = a \cdot b$

Definición 0.9 Partición de un Intervalo

El conjunto $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ si $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Si P es una partición de $[a, b]$ se llama norma de P y se denota por $|P|$ al real:

$$|P| = max\{(x_i - x_{i-1}) : i = 1, ..., n\}$$

Definición 0.10 Sumas Superiores e Inferiores

Sea f una función definida y acotada en $[a, b]^1$. Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Como f es acotada en $[a, b]$ también lo es en cada intervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i] \forall i = 1, ..., n$ luego podemos definit:

$$m_i(f) = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i(f) = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Con esto se definen las siguientes sumas:

1. $S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1})$ se llama suma superior de f correspondiente a la partición P.
2. $s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$ se llama suma inferior de f correspondiente a la partición P.

Definición 0.11 Integrales Superiores e Inferiores

Sea $\mathcal{P}_{[a,b]}$ el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$. Sea f una función definida y acotada sobre $[a, b]$. Los números reales:

$$\int_{-a}^{b} = sup\{s(f, P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$$

$$\int_{a}^{-b} f = inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$$

Se llama integral inferior de f en $[a, b]$ e integral superior de f en $[a, b]$ respectivamente

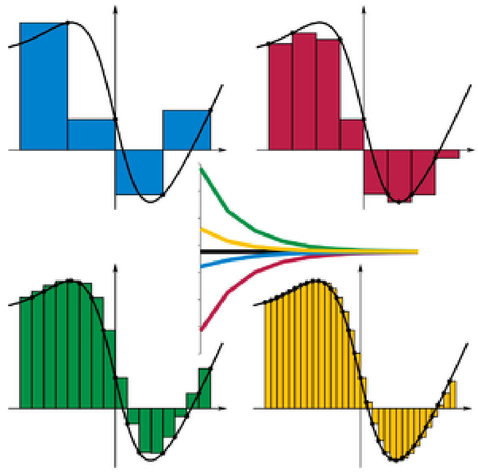


Figura 1: Cuatro de los métodos de suma de Riemann para aproximar el área bajo las curvas

Fórmula 1 (Integrabilidad de Riemann)**.**

$$\lim_{n\to n} . \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)dx$$

Definición 0.12 Refinamiento de una Partición o Partición Más Fina

Sean P y Q dos particiones de $[a, b]$ si $P \subseteq Q$ diremos que Q es un refinamiento P o una partición más fina que P.

Proposición 3. *Si $P \subseteq Q$ entonces:*

$$s(f, P) \leq s(f, Q)$$
$$S(f, P) \geq S(f, Q)$$

Definición 0.13

Diremos que una función f definida y acotada en $[a, b]$ es integrable según Riemann si se cumple que $\int_{-a}^{b} f = \int_a^{-b} f$, en tal caso, el valor común de estas dos integrales se llaman simplemente la integral de f en $[a, b]$ y se denota por $\int_a^b f$

Teorema 24 (Condición de Riemann)**.** *Una función f definida y acotada en un intervalo $[a, b]$ es Riemann-integrable en $[a, b]$ si y solo si:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]})S(f, P)s(f, P) < \epsilon$$

0.7. Propiedades de la Integral

Proposición 4. *Si f es una función definida, acotada y monótona en $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$*

Teorema 25. *Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces es integrable en $[a, b]$*

Corolario 1. *Si f es continua en $[a, b]$, entonces:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]})\{|P| \leq \delta \Rightarrow$$

$$|\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f| \leq \epsilon\}$$

Lema 1. *Si f es una función integrable en $[a, b], a < b$ y $[r, s] \subseteq [a, b]$ con $r < s$, entonces f es integrable en $[r, s]$*

Lema 2. *Si f está definida y es acotada en $[a, b], a < b$ y $c \in (a, b)$ entonces:*

$$\int_{-a}^{b} f \geq \int_{-a}^{c} f + \int_{-c}^{b} f$$

$$\int_{-a}^{b} f \leq \int_{a}^{-c} f + \int_{c}^{-b}$$

Lema 3. *Si f y g son dos funciones definidas y acotadas en $[a, b], a < b$, entonces:*

$$\int_{-a}^{b} f + \int_{-a}^{b} g \leq \int_{-a}^{b} (f + g)$$

$$\int_{a}^{-b} (f + g) \leq \int_{a}^{-b} f + \int_{a}^{-b} g$$

Teorema 26 (Propiedades de la Integral)**.** *Notamos lo siguiente:*

1. *Si $c \in \mathbb{R}$ entonces $\int_a^b c = c(b - a)$*
2. *Si f es integrable en $[a, b]$ y $c \in (a, b)$ entonces f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$ y además:*
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
3. *Si f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$ entonces f es integrable en $[a.b]$ y:*
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
4. *Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$ entonces $(f + g)$ es integrable en $[a, b]$ y:*
$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b f$$
5. *Si f es una función integrable en $[a, b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces (αf) es integrable en $[a, b]$ y:*
$$\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f$$
6. *Si f y g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ entonces:*
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$
7. *Si f es integrable en $[a, b]$ entonces $|f|$ es integrable en $[a, b]$ y:*
$$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$$

Definición 0.14

Sea f una función integrable en un intrvalo $[p,q]$. Si $a,b \in [p,q]$ son tales que $a \geq b$ entonces se define la integral de a a b del modo siguiente:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f \text{ si } a > b, o$$

$$\int_a^b f = 0 \text{ si } a = b$$

Proposición 5. *Sean f y g integrales en $[p,q]$ y $a,b \in [p,q]$ entonces:*

1. $\int_a^b \alpha = \alpha(b-a), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \forall c \in [p,q]$
3. $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
5. $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [p,q] \Rightarrow |\int_a^b f| \leq |\int_a^b g|$
6. $|\int_a^b f| \leq |\int_a^b |f||$

0.8. Teorema Fundamental del Cálculo

Proposición 6. *Sea f una función integrable en $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Entonces la función G definida por:*

$$G(x) = \int_a^x f$$

es continua en $[a,b]$.

Teorema 27 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$ entonces la función G está definida por:*

$$G(x) = \int_a^x f$$

Es derivable en $int(I)$ y además $G' = f$ en $int(I)$.

Corolario 2. *Si la función F es continua en I, es una primitiva f en I, entonces:*

$$\forall a,b \in I, \int_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema 28 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea f integrable en $[a,b]$. Si existe una función F continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $F' = f$ en (a,b), entonces:*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Teorema 29. *Sean f y g son dos funciones conitnuas en un intervalo I y diferenciables en $int(I)$. Sean $a, b \in int(I)$. Si f' y g' son continuas entonces:*

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

Teorema 30. *Sea g una función continua en un intervalo I y derivable en $int(I)$ con g' continua. Sean $a, b \in int(I)$, con $a < b$. Sea f una función continua en $g([a, b])$, entonces:*

$$\int_a^b (f \circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f$$

Definición 0.15 Valor Medio de una Función

Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Se llama valor medio de f en $[a, b]$ al número real:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

A este real se le anota $\bar{f}$ o. bien $< f >$

Teorema 31 (Valor Medio para Integrales)**.** *Si f es continua en $[a, b]$ entonces $\exists \xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) =< f >$, es decir:*

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$$

Teorema 32 (Valor Medio Generalizado para Integrales)**.** *Si f es continua en $[a, b]$ y g es una función integrable en $[a, b]$ que no cambia de signo, entonces $\exists \xi \in [a, b]$ tal que:*

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g$$

Teorema 33 (Taylor con Resto Integral)**.** *Se calcula con la siguiente fórmula:*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

Llamaremos al término:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

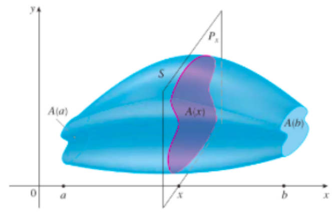
como el resto integral del desarrollo de Taylor.

0.9. Aplicaciones de la Integral de Riemann

Volumen de un sólido mediante sección transversal:

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Donde $A(x)$ es el área de la sección transversal:



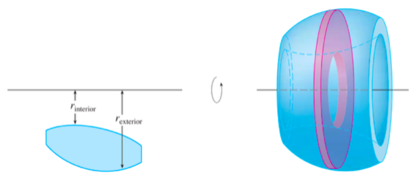
Método de los Anillos: Volumen de un sólido de revolución, hacemos girar los radios:

$$y_1 = r_{exterior}(x)$$

$$y_2 = r_{interior}(x)$$

Al rededor del eje X:

$$V = \int_a^b \pi(r_e^2(x) - r_i^2(x))dx$$



En forma análoga hacemos girar los radios:

$$x_1 = r_e(y)$$

$$x_2 = r_i(y)$$

AL rededor del eje Y:

$$V = \int_c^d \pi(r_e^2(y) - r_i^2(y))dy$$

0.10. Integrales Impropias

Definición 0.16 Integral Impropia de Primera Especie (Intervalo no Acotado)

Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ diremos que f es integrable en $[a, +\infty)$ si se cumple que:

1. $\forall x \in (a, +\infty), f$ es integrable en $[a, x]$.

2. Existe el límite definido por:

$$lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$$

Notación 1. *Si una función es integrable en el intervalo $[a, \infty)$ entonces al valor del límite se le llama integral impropia de primera especie de f y se le denota:*

$$\int_a^{+\infty} f = lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$$

Definición 0.17 Integral Impropia de Segunda Especie (Funciones no Acotadas)

Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ una función no acotada, diremos que f es integrable en $[a, b)$ si y solo si:

1. $\forall x \in (a, b), f$ es integrable en $[a, x]$
2. El límite $lim_{x \to b^-} \int_a^x f$ existe.

Definición 0.18 Integrales Impropias de Tercera Especie o Mixtas

Son las que se obtienen combinando integrales impropias de primera y segunda especie. Por ejemplo:

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0^-} \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

Este tipo de integral será convergente si y solo si cada una de sus componentes es una integral convergente.

Teorema 34 (Criterio de Comparación). *Sean f y g funciones continuas en $[a, +\infty)$ tales que:*

$$(\exists b \geq a)(\forall x \geq b), 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

entonces si $\int_a^{+\infty} g$ converge entonces $\int_a^{+\infty} f$ converge. Recíprocamente si $\int_a^{+\infty} f$ diverge, entonces $\int_a^{+\infty} g$ diverge.

Teorema 35 (Criterio del Cuociente de Funciones). *Sean f y g funciones continuas en $[a, +\infty)$ y no negativas en $[b, +\infty)$, donde $b \geq a$ y tales que:*

$$lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

Entonces las integrales impropias $\int_a^{+\infty} f$ y $\int_a^{+\infty} g$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Definición 0.19 Convergencia Absoluta

Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, diremos que $\int_a^{+\infty} f$ es absolutamente convergente si $\int_a^{\infty} |f|$ converge.

Teorema 36. *Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$,se tiene que:*

$$\int_a^{+\infty} f \text{ converge absolutamente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge}$$

0.11. Series Numéricas

Definición 0.20 Serie

Una serie es un par ordenado $(A, (a_n))$ donde A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ numerable y $(a_n)_{n \geq 0}$ es una numeración del conjunto A.

Definición 0.21 Sucesiones de Cauchy

Una sucesión (x_n) de números reales se dice de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Teorema 37. *Una sucesión es convergente si y solo si es de Cauchy.*

Teorema 38 (Criterio de Cauchy)**.** *Sea (a_n) una sucesión y (s_n) la sucesión de sus sumas parciales. La serie $\sum a_k$ converge si y solo si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, m > n \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{m} < \varepsilon|$$

Teorema 39. *Si la serie $\sum a_k$ converge entonces la sucesión $(a_n) \to 0$*

Teorema 40. *Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series convergentes, entonces:*

1. $\sum(a_k + b_k)$ *es convergente y su valor es* $(\sum a_k) + (\sum b_k)$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum(\lambda a_k)$ *es convergente y su valor es* $\lambda(\sum a_k)$

Teorema 41. *Una serie de términos no negativos converge si y solo si las sumas parciales son acotadas superiormente.*

Teorema 42. *Sea $\sum a_k$ una serie de términos no negativos y convergente. Sea (b_k) una numeración del conjunto $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ entonces $\sum b_k$ es convergente y $\sum b_k = \sum a_k$.*

0.12. Series de Potencias

Definición 0.22 Serie de Potencia

Una serie de potencias es una serie en donde el término general es de la forma $a_k(x - \alpha)^k$

Proposición 7. *Si la serie $\sum a_k x_0^k$ converge, se tiene que para cada $a \in (0, |x_0|)$ y para todo $x \in [-a, a]$ la serie $\sum a_k x^k$ converge absolutamente.*

Definición 0.23 Radio de Convergencia

Al valor R lo llamaremos el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum a_k x^k$.

Definición 0.24 Intervalo de Convergencia

Llamamos intervalo de convergencia I al conjunto de reales x para los cuales de la serie $\sum a_k x^k$ converge. Tenemos que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$.

Teorema 43. *Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias con radio de convergencia mayor que cero. Definiendo la función f se tiene que esta es continua en $int(Dom(f))$.*

Proposición 8. *Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias de radio de convergencia $R > 0$. Entonces $\forall p \in \mathbb{Z}$, la serie $\sum k^p a_k x^k$ tiene radio de convergencia R.*

Observación 5. *Gracias a este último resultado, si* $a_k x^k$ *tiene radio de convergencia* $R > 0$, *entonces* $\sum \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}$ *tiene también radio de convergencia* $R > 0$.
Lo mismo sucede para la serie de potencias $\sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1}$

Teorema 44. *Sea* $\sum a_k x^k$ *una serie de potencias, con radio de convergencia* $R > 0$. *Entonces la función* f *es integrable en* $(-R, R)$ *y:*

$$\forall x \in (-R, R), \int_0^x f(t)dt = \int_0^x (\sum a_k t^k)dt = \sum \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}$$

Teorema 45. *Sea* $\sum a_k x^k$ *una serie de potencias, con radio de convergencia* $R > 0$. *Entonces la función* f *es derivable en* $(-R, R)$ *y:*

$$\forall x \in (-R, R), f'(x) = \sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1}$$

Teorema 46. *Dadas dos series de potencias* $\sum a_k x^k$ *y* $\sum b_k x^k$ *convergentes para* x_0. *Entonces la serie* $\sum (a_k + b_k)x^k$ *converge para todo* $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ *y se tiene que* $\sum (a_k + b_k)x^k = \sum a_k x^k + \sum b_k x^k$. *Además si* $c_k = \sum a_j b_{k-j}$ *la serie* $\sum c_k x^k$ *converge* $\forall x \in (-|x_0|, |x_0|)$ *y se tiene que* $\sum c_k x^k = (\sum a_k x^k)(\sum b_k x^k)$.