MA1002-5 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Álvaro Hernández
Auxiliar: Luciano Avegno Cepeda

Recopilación Problemas

1. Estudie la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{k}(2k+1)}{(2n-1)3^n n!}$$

2.
   1. Estudie la convergencia absoluta y condicional de la serie:
   $$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sqrt{\frac{k}{k^2+1}}$$
   2. Estudie para que valores de $p>0$ la serie:
   $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kln^p(k)}$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x + b^x$, con $a, b \in \mathbb{R}, a > 1, b > 0$.
Demuestre que si $aln(a) + bln(b) = 0$, entonces $a^x + b^x \geq a + b, \forall x \in \mathbb{R}$, o sea $\bar{x} = 1$ es mínimo global de f. Para esto proceda como sigue:
   1. Calcule $f'(x)$ y demuestre usando la propiedad que puede escribirse como:
   $$f'(x) = a^x ln(x)[1 - (\frac{b}{a})^{i-1}]$$
   2. Pruebe que $0 < b < 1$. Calcule $f'(1)$. Estudie los crecimientos de la función.

4. Considere la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:
$$h(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$$
   1. Demuestre que existe un único real $x_0 \in [0,1]$ tal que $h(x_0) = 0$.
   2. Pruebe que $\bar{x} = 0$ es un punto de inflexión de h.

5. Considere la función $f : [0,2]$ dada por $f(x) = 2x$ si $x \in [0,1]$ y $f(x) = 1$ si $x \in (1,2]$. Para la partición de $[0,2]$ dada por $\mathcal{P} = \{0,1,2\}$ demuestre que $s(f,\mathcal{P}) = 1$ y que $S(f,\mathcal{P}) = 4$.

6. Demuestre que:
$$\frac{1}{2}(\frac{1}{exp(1/4)} + \frac{1}{e}) \leq \int_0^1 exp(-x^2)dx \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{exp(1/4)})$$
Para esto considere la partición $\mathcal{P} = \{0, 1/2, 1\}$

7. Considere la función $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x + x^2/2 + x^3/3 + ... + x^n/n, \forall n \geq 1$. Demuestre que $f_n(x)$ es estrictamente creciente y que la ecuación $f_n'(x) = 2$ para $n \geq 1$ tiene solución única $\bar{x} \in [0,1]$.

8. Encuentre la ecuación de la recta $L \in \mathbb{R}^2$que pasa por el punto $P(3,5)$ y tal que el triángulo del primer cuadrante determinado por L y los ejes coordenados tenga área mínima. Justifique el mínimo y calcule el área mínima.

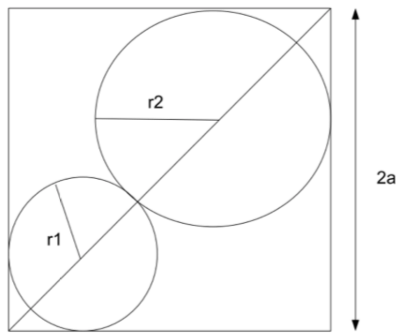
9. Use el teorema del valor medio para probar que $arctan(x) \leq x, \forall x \in [0,\infty)$ y calcule el área entre las curvas definidas por $f(x) = x$ y $g(x) = arctan(x)$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

10. Sea $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface:
$$h(x \cdot y) = h(x) + h(y)$$
Muestre que si h es continua en $x = 1$ entonces es continua en todo punto de su dominio.

11. A partir de un círculo de centro O de papel de radio R, se desea construir un cono. Para ello se desprende un sector circular de ángulo central Θ y extremos A y B, se juntan los trazos OA y OB de modo que coincidan. Se forma así un cono recto circular cuya base es un círculo de radio r y perímetro igual a la longitud de arco que queda después del corte. Buscamos encontrar el valor de Θ de tal modo que el cono tenga volumen máximo. Para ello proceda como sigue:
   1. Demuestre que el radio basal de r del cono es $r = R(1 - \frac{\Theta}{2\pi})$.
   2. Demuestre que la altura h del cono es $h = R\sqrt{1 - (1 - \frac{\Theta}{2\pi})^2}$
   3. Verifique que con la sustitución $x = 1 - \frac{\Theta}{2\pi}$ el volumen resulta:
   $$V(x) = \frac{1}{3}\pi R^3 x^2 \sqrt{1 - x^2}$$
   4. Calcule el volumen máximo del cono y el ángulo $Theta$ que lo genera.

12. Demuestre que:
   - $\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < ln(x+1) - ln(x) < \frac{1}{x}$
   - Las funciones f y g definidas sobre $\mathbb{R}_+^*$ como: $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ y $g(x) = (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ son monótonas.
   - $lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = lim_{x \longrightarrow \infty} g(x) = e$.

13. **[EXAMEN 2009].** En un cuadrado de lado $2a$ se inscriben dos circunferencias de radios r_1 y r_2 centradas en la diagonal del cuadrado, tangentes entre si y ambas tangentes al cuadrado.



1. Demuestre que $r_1 + r_2 = \frac{4a}{2+\sqrt{2}}$
2. Determine los valores de r_1 y r_2 de modo que la suma de las áreas de ambos círculos sea máxima.

14. **[EXAMEN 2020].** Grafique la función $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ indicando las zonas de crecimientos/decrecimiento convexidad/concavidad y asíntotas si las hubiera.

15. **[EXAMEN 2009 RECUPERATIVO]**. Sea $f : [a,b] \longrightarrow [\alpha, \beta]$ una función biyectiva de clase C^1. Demostrar que:

$$\int_\alpha^\beta f^{-1}(t)dt = [b\beta - a\alpha] - \int_a^b f(x)dx$$

Indicación: usar la sustitución $f(x) = t$

16. Analice la función $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ indicando máximos y mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de inflexión, intervalos de concavidad y convexidad, y as ıntotas. Haga un gráfico aproximado a partir de los datos encontrados.

17. Determine el intervalo de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum \frac{(-3)^n (x+2)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

18. Determine la convergencia de la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} exp(-x^2)dx$$