Problema 1:

a)

Analice la convergencia de la siguiente serie; en caso de ser convergente, calcule su valor.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Primero que nada, la funcion es decreciente, así que usaremos el criterio de la integral impropia.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} dk$$

Usamos el hint y separamos cada integral para trabajarla por separado.

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}\right)dk = \int_1^{\infty}\frac{1}{2k}dk + \int_1^{\infty}\frac{1}{2(k+2)}dk - \int_1^{\infty}\frac{1}{k+1}dk$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_1^{\infty}\frac{1}{k} + \int_1^{\infty}\frac{1}{k+2}\right) - \int_1^{\infty}\frac{1}{k+1}$$

Hacemos unos cuantos cambios de variables.

$$u = (k+2)$$
$$du = dk$$
$$w = (k+1)$$
$$dw = dk$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_1^{\infty}\frac{1}{k}dk + \int_3^{\infty}\frac{1}{u}du\right) - \int_2^{\infty}\frac{1}{w}dw$$
$$= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2}\left(\int_1^{a}\frac{1}{k}dk + \int_3^{a}\frac{1}{u}du\right) - \int_2^{a}\frac{1}{w}dw$$
$$= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2}(\ln(a) - \ln(1)) + \frac{1}{2}(\ln(a) - \ln(3)) - \ln(a) + \ln(2)$$
$$= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2}\ln(a) + \frac{1}{2}\ln(a) - \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(a) + \ln(2)$$
$$= \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3) = \frac{1}{2}(2\ln(2) - \ln(3)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

Con esto concluimos que la serie converge y además converge en el punto $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$

b)

Use el Criterio de la Integral para analizar la convergencia de la integral $\int_1^{\infty} \frac{e^y}{y^y}$

Solución:
Para esto, recordemos que si $f : [1, +\infty) \to R^+$ es continua y decreciente:

$$\sum_{n\geqslant 1} f(n) \text{ converge equivale a que } \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ converge}$$

Así, veamos si $f(y) = \frac{e^y}{y^y}$ es continua y decreciente en $[1, +\infty)$. Como $y > 0$, $y^y = e^{y\ln(y)}$, así se verifica que f es continua, al ser división de funciones continuas.
Para decrecimiento, analizaremos la derivada de f:

$$f'(y) = \frac{e^y e^{yLn(y)} - e^y e^{yLn(y)}(Ln(y) + 1)}{{y^y}^2}$$
$$f'(y) = \frac{e^y e^{yLn(y)}(1 - Ln(y) - 1)}{{y^y}^2}$$
$$f'(y) = \frac{e^y e^{yLn(y)}(-Ln(y))}{{y^y}^2}$$

Así como $y \geqslant 1$, $f'(y) \leqslant 0$, verificando el decrecimiento de f en $[1, +\infty)$, por lo que podemos usar el criterio de la integral impropia.
Notamos que, en $[1, +\infty)$, $f(y) = \frac{e^y}{y^y}$ es no negativa, así, usaremos el criterio de la raíz y-esima:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\sqrt[y]{e^y}}{\sqrt[y]{y^y}} = \lim_{y\to\infty} \frac{e}{y} = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{y\geqslant 1} \frac{e^y}{y^y} \text{ converge}$$

Y por el criterio de la integral impropia:

$$\sum_{y\geqslant 1} \frac{e^y}{y^y} \text{ converge asi, } \int_1^{+\infty} \frac{e^y}{y^y} \text{ converge}$$

c)

analizar convergencia absoluta y condicional de la serie: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)}$

Observemos que $\frac{(2k+1k)}{k(k+1)} \to 0$. Es una serie positiva y además es decreciente, ya que el grado del denominador es mayor que el del numerador, entonces por el criterio de Leibnitz, dadas estas condiciones la serie converge.
Ahora para la convergencia absoluta, aplicaremos valor absoluto a la serie y veremos que ocurre con la serie.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k(k+1)}$$

Para resolver esta serie usamos el criterio de la integral indefinida:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k(k+1)} = \int_1^{\infty} \frac{2x+1}{x^2+x}dx$$

integracion por sustitucion $\Rightarrow u = x^2 + x$, $du = 2x+1$, limite superior $= \infty$, limite inferior $= 2$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{u}du = \ln|u|\Big|_2^{\infty} = \ln|\infty| - \ln|2| = \text{es divergente}$$

Con esto se concluye que esta serie converge de manera condicional pero no absoluta.

Problema 2:

a1)

Demuestre que para todo número real p, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{pn}}{n!}$ converge.

Sabemos que e > 0 en todo su dominio, por lo tanto $e^{pn} > 0$ para todo n. Entonces podemos usar criterios de series no negativas.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{e^{pn+p} * n!}{e^{pn}(n+1)!} = \lim \frac{e^p}{n+1} = 0$$

Y, usando el criterio del cuociente, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{pn}}{n!}$ converge.

a2)

Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{10}{n}\right)^{n^2}}{n!}$.

$$\left(1+\frac{10}{n}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{10}{n}\right)^{n*n} \lessapprox \left(e^{10}\right)^n = e^{10n}.$$

$\Rightarrow \frac{\left(1+\frac{10}{n}\right)^{n*n}}{n!} \lessapprox \frac{e^{10n}}{n!}$. Tomando en cuenta la parte a, con p=10 se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{10n}}{n!}$ converge.

Luego, por mayoración, se tiene que $\sum \frac{\left(1+\frac{10}{n}\right)^{n^2}}{n!}$ converge.

b1)

PDQ: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

En efecto: Según enunciado nos definen $a_n = (-1)^n f(n)$ y además $f(x) = \frac{\pi}{2} - \text{arctarn}(x)$.

Con esto se tiene que $f(n) = \frac{\pi}{2} - \arctan(n)$, y la serie queda de la forma: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)$

Veremos la convergencia según criterio de Leibnitz

para ello debemos probar que $f(n) = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)$

Notar que $\lim_{n\to\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2}$, por lo tanto $a_n \to 0$ es decreciente a cero y posivita.

Luego, según criterio de Leibnitz / series alternantes se concluye que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge □

b2)

Calculemos el límite que nos indican:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right),$$

dividimos arriba y abajo por $\frac{1}{x}$ quedando de la forma:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)}{\frac{1}{x}}, \text{ como es de la forma } \lim_{x\to+\infty} \frac{0}{0} \text{ cuando x tiende a } +\infty$$

Aplicando L'hopital queda

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) = 1$$

Veamos ahora, la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=0} a_n$, de tal manera que queda:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|(-1)^n\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right),$$

para analizarla mejor separemos el valor del indice 0 de la serie

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)$$

Ahora notemos que por criterio de comparación por cuociente con $\frac{1}{x}$ se tiene que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)}{\frac{1}{x}}$$

Que es el mismo que ya calculamos y vale 1, como el criterio de comparacion por cuociente nos dice que si el límite es mayor a 0, ambas serie son de la misma naturaleza y como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ no converge y el límite del cuociente vale 1} \qquad (1)$$

Por lo tanto tienen el mismo comportamiento cuando $n \to \infty$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right) \text{ no converge } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right) \text{ no converge}$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)\right| \text{ no converge}$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right) \text{ no converge absolutamente}$$

Problema 3:

a)

Convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$.

Para este utilizaremos el criterio de la raíz n-ésima.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim_{k\to\infty}\frac{k^k}{(k+1)^k} \to \lim_{k\to\infty}\frac{k^k}{\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{k!}{(k-n)!n!}\right)k^{k-n}1^n} \to \lim_{k\to\infty}\frac{k^k}{k^k + k^k + \frac{k^k}{2} - \frac{k^{k-1}}{2} + \dots}$$
$$\to \lim_{k\to\infty}\frac{k^k}{k^k\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right) - k^{k-1}(\dots) + \dots} \to \lim_{k\to\infty}\frac{k^k}{ek^k - k^{k-1}(\dots) + \dots} \to \lim_{k\to\infty}\frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

La forma formal de escribir los últimos pasos sería dividiendo arriba y abajo por k^k resultando en los términos de grado menor a k a tender a cero y aquellos de grado k a tender a su factor.

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ es convergente.

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{j=1}^{k}\left(1+\alpha\sqrt{j}\right)} = \frac{\sqrt{0!}}{(1+\alpha)} + \frac{\sqrt{1!}}{(1+\alpha)\left(1+\alpha\sqrt{2}\right)} + \frac{\sqrt{2!}}{(1+\alpha)\left(1+\alpha\sqrt{2}\right)\left(1+\alpha\sqrt{3}\right)} + \dots$$

Luego $\frac{1}{\alpha+1} \leqslant \frac{1}{\alpha}$,

$$\therefore \frac{\sqrt{0!}}{(1+\alpha)} + \frac{\sqrt{1!}}{(1+\alpha)\left(1+\alpha\sqrt{2}\right)} + \dots \leqslant \frac{\sqrt{0!}}{\alpha} + \frac{\sqrt{1!}}{\alpha^2\sqrt{2!}} + \frac{\sqrt{2!}}{\alpha^3\sqrt{3!}} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(k-1)!}}{\alpha^k\sqrt{k!}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^k k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^k}$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{j=1}^{k}\left(1+\alpha\sqrt{j}\right)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^k}$$

Notemos que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^k} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\alpha} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{\alpha}}$, como $\alpha > 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} < 1$

Luego $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\alpha} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{\alpha}} = \frac{\frac{1}{\alpha}}{1-\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha-1}$

Como $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^k}$ converge, por criterio de comparación, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{j=1}^{k}\left(1+\alpha\sqrt{j}\right)}$ también converge.

c)

Sea $f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \wedge g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$

Luego es claro que, $\forall x \geqslant 0$, $\frac{1}{1+x^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow \forall x \geqslant 0$, $f'(x) \leqslant g'(x) \Leftrightarrow \forall x \geqslant 0$, $\int_0^x f'(u)du \leqslant \int_0^x g'(u)du$
$\Leftrightarrow \forall x \geqslant 0$, $f(x) - f(0) \leqslant g(x) - g(0)$, luego $f(0) = \arctan(0) = 0 \wedge g(0) = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow \forall x \geqslant 0$, $\arctan(x) \leqslant x$

$\sum_{k=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$, notemos que $\frac{1}{1+k+k^2} \geqslant 0$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Luego por criterio de convergencia de integrales, $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converge,

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ converge y por criterio de comparación $\sum_{k=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$ converge.