Auxiliar 6

Funciones II: Conjuntos Imagen y Preimagen

Profesor: Rodolfo Gutiérrez Romo
Auxiliar: Josefa Muñoz Montenegro

P1.- Sea $f : A \to B$ una función y sean C, C' subconjuntos de $f(A)$. Pruebe que

$$C \cup C' = f(A) \Rightarrow f^{-1}(C) \cup f^{-1}(C') = A$$

P2.- Sean A, B subconjuntos de un mismo universo U tales que $A \cap B = \emptyset$. Sea $f : U \to U$ una función.

i- Pruebe que si f es inyectiva, entonces $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

ii- Pruebe que si f es sobreyectiva, entonces $f(A) \cup f(A^c) = U$.

P3.- Sea E un conjunto de referencia no vacío y $A \subseteq E$. Se definen las funciones f y g de $\mathcal{P}(E)$ en $\mathcal{P}(E)$ tales que

$$f(X) = X \backslash A \quad \text{y} \quad g(X) = X \cup A \quad \text{para todo } X \subseteq E$$

i- Demuestre que $f^{-1}(\{\emptyset\}) = P(A)$

ii- Demuestre que $g(P(E)) = \{Y \in P(E) \mid A \subseteq Y\}$

P4.- Sean A, B y C conjuntos, y sean $f : A \to B, g : B \to C$ y $h : A \to C$ funciones tales que g es inyectiva, h es biyectiva, y $h = g \circ f$.

Demuestre que f y g son biyectivas, y determine f^{-1} en términos de g, hy/o sus inversas.

P5.- Sean E, F y G conjuntos no vacíos. Sean $f : E \to F$ y $g : F \to G$ funciones.

i- Demuestre que $(\forall A, B \subseteq E, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)) \Leftrightarrow f$ es inyectiva.

ii- Demuestre que $\forall A \subseteq G, (g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

Conjuntos Imagen y Preimagen

Imagen y preimagen: Si $f : A \to B$, y si $y = f(x)$ decimos que y es imagen de x a través de f, y que x es preimagen de y a través de f. Es importante notar que si $x \in A$ posee una única imagen $y \in B$. Pero los elementos $y \in B$ pueden tener varias preimágenes distintas.

Conjunto imagen: Sea $f : A \to B$ una función, y sea $A' \subseteq A$. Definimos el conjunto imagen de A' por $f(A') = \{b \in B : (\exists a \in A')\, f(a) = b\}$ o equivalentemente

$$b \in f(A') \iff (\exists a \in A')\, f(a) = b$$

Notar que $f(A') \subseteq B$

Propiedades: Sea $f : A \to B$ función. Sean $A_1, A_2 \subseteq A$

i. f es sobreyectiva $\iff f(A) = B$

ii. $A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$

iii. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

iv. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

Conjunto preimagen: Dado $B' \subseteq B$, se define el conjunto preimagen de B' por f como

$$f^{-1}(B') = \{a \in A : f(a) \in B'\}$$

o, equivalentemente

$$a \in f^{-1}(B') \iff f(a) \in B'$$

Notar que $f^{-1}(B') \subseteq A$

Propiedades: Sea $f : A \to B$ función. Sean $B_1, B_2 \subseteq A$

i. $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

ii. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

iii. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Propiedades:

i. Si $A' \subseteq A$ entonces $A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$

ii. Si $B' \subseteq B$ entonces $f\left(f^{-1}(B')\right) \subseteq B'$

iii. f es inyectiva $\iff (\forall A' \subseteq A)\, A' = f^{-1}(f(A'))$

iv. f es sobreyectiva $\iff (\forall B' \subseteq B)\, B' = f\left(f^{-1}(B')\right)$

Propiedades: Sea $f : A \to B$ función. Se tiene:

i. f es inyectiva si cada elemento del codominio tiene a lo más una preimagen, es decir, f es inyectiva $\iff \forall y \in B, f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \vee \left(\exists! x \in A, f^{-1}(\{y\}) = \{x\}\right)$

ii. f es sobreyectiva si cada elemento del codominio tiene al menos una preimagen, es decir, f es sobreyectiva $\iff \forall y \in B, f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$

iii. f es biyectiva si cada elemento del codominio tiene exactamente una preimagen, es decir,

$$f \text{ es biyectiva } \iff \forall y \in B, f^{-1}(\{y\}) = \left\{ f^{-1}(y) \right\}.$$

En general, si f es biyectiva y denotamos su inversa por h, entonces se tiene que

$$\forall B' \subseteq B, f^{-1}\left(B'\right) = h\left(B'\right)$$

Es decir, la preimagen de B' por f y la imagen de B' por h coinciden, para cualquier $B' \subseteq B$