MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Nicolás Toro

Auxiliar 6

P1. Sea V el s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ definido como:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

Encuentre una base y dimensión de V

P2. Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de todos los polinomios de grado 3 o menos en $\mathbb{R}$.

Considere el conjunto $W = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p'(-1) = 0,\ p''(1) = 0\}$ donde $p'(x)$ y $p''(x)$ son la primera y segunda derivada respectivamente.

Muestre que W es s.e.v. de $\mathbb{R}_3[x]$ y encuentre una base para W.

P3. Considere el conjunto $V \subset \mathcal{M}_{3\times 3}$ definido como:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \mid a = e = i = 0, d = -b, g = -c, h = -f \right\}$$

Muestre que V es un subespacio vectorial y escriba un generador.

P4. Sea $S = \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \rangle$ donde

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre una base para el generador de S.

P1. Sea V el s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ definido como:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

Encuentre una base y dimensión de V

Notemos que cualquier vector $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ en V satisface que $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$

o equivalentemente $x_1 = x_2 - x_3 + x_4$.

Luego se tendrá que

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El cálculo anterior nos muestra que cualquier vector $\vec{x} \in V$ puede ser escrito como combinación lineal de u_1, u_2, u_3.

Luego $\langle \{u_1, u_2, u_3\} \rangle = V$

Veamos ahora que $\{u_1, u_2, u_3\}$ es l.i.

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$\therefore$ $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base para V y luego $\dim(V) = 3$.

P2. Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de todos los polinomios de grado 3 o menos en $\mathbb{R}$.

Considere el conjunto $W = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p'(-1) = 0,\ p''(1) = 0\}$ donde $p'(x)$ y $p''(x)$ son la primera y segunda derivada respectivamente.

Muestre que W es s.e.v. de $\mathbb{R}_3[x]$ y encuentre una base para W.

·) Por def de W se tiene que $W \subseteq P_3$.

·) Notemos que el cero de P_3 es el polinomio $p(x)=0$ (denotemoslo $\theta(x)$)
Entonces $\theta(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Notemos que $\theta'(x) = 0$ y $\theta''(x) = 0$. Luego $\theta'(-1) = 0$ y $\theta''(1) = 0$
y se tiene que $\theta(x) \in W$.

·) Sean $f(x), g(x) \in W$. Veamos que $(f+g)(x) \in W$.
Denotemos por $h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
Notemos que $h'(x) = (f(x)+g(x))'$

$$= f'(x) + g'(x)$$

Analogamente : $h''(x) = f''(x) + g''(x)$.
Luego

$$\begin{aligned} h'(-1) &= f'(-1) + g'(-1) \\ &= 0 + 0 \quad , \text{pues } f,g \in W \\ &= 0 \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} h''(1) &= f''(1) + g''(1) \\ &= 0 + 0 \quad , \text{pues } f,g \in W \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se concluye que $h(x) \in W \Rightarrow f+g \in W$.

·) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in W$. Veamos que $\alpha f \in W$.
Notemos que $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$ y $(\alpha f(x))'' = \alpha f''(x)$
Luego

$$\begin{aligned} (\alpha f(-1))' &= \alpha f'(-1) \\ &= \alpha \cdot 0 , \text{pues } f \in W \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha f(1))'' &= \alpha f''(1) \\ &= \alpha \cdot 0 \quad , \text{pues } f \in W. \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se concluye que $W \leq P_3$.

•) Encontremos ahora una base para W.

Notamos que cualquier vector en W es un polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

que satisface

$$p'(-1) = 0 \quad \wedge \quad p''(1) = 0$$

Como tenemos que

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \quad \wedge \quad p''(x) = 2a_2 + 6a_3 x$$

La condición anterior se puede escribir como:

$$a_1 + 2a_2\cdot(-1) + 3\cdot a_3\cdot(-1)^2 = 0 \quad \wedge \quad 2a_2 + 6\cdot a_3\cdot(1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 0 \qquad\qquad \Rightarrow \quad 2a_2 + 6a_3 = 0$$

Para encontrar soluciones a esta ecuación consideremos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Luego la solución está dada por: $a_1 = -9a_3$
$a_2 = -3a_3$

Por lo tanto cualquier polinomio $p(x) \in W$ puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ &= a_0 - 9\cdot a_3\cdot x - 3a_3 x^2 + a_3 x^3 \\ &= a_0(1) + a_3[-9x - 3x^2 + x^3] \end{aligned}$$

En particular tenemos que los polinomios $f_1(x) = 1$ y $f_2(x) = -9x - 3x^2 + x^3$ están en W, pues $f_1'(x) = 0 \ \forall x$ $\wedge$ $f_2'(x) = -9 - 6x + 3x^2$ $\wedge$ $f_2''(x) = -6 + 6x$ y como cualquier polinomio $p(x) \in W$ puede ser escrito como combinación lineal de $f_1(x)$ y $f_2(x)$, el conjunto $\{f_1(x), f_2(x)\}$ es un generador para el subespacio W.

Veamos que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son linealmente independientes

Consideremos la combinación lineal

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad c_1 - 9c_2 x - 3c_2 x^2 + c_2 x^3 = 0$$

Se tiene entonces que $c_1 = c_2 = 0$ y por tanto $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son l.i.

Es decir $\{f_1(x), f_2(x)\}$ es un generador l.i. para W y por tanto es una base para W.

La base de W es entonces

$$\{1, -9x - 3x^2 + x^3\}$$

<u>obs</u>. la dimensión de W es 2.

P3. Considere el conjunto $V \subset \mathcal{M}_{3\times 3}$ definido como:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \mid a = e = i = 0, d = -b, g = -c, h = -f \right\}$$

Muestre que V es un subespacio vectorial y escriba un generador.

- Claramente $V \subseteq M_{3\times3}$
- Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A, B \in V$. pdq $\alpha A + \beta B \in V$

En efecto, consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & e_2 \\ -e_1 & 0 & e_3 \\ -e_2 & -e_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ -b_1 & 0 & b_3 \\ -b_2 & -b_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha e_1 & \alpha e_2 \\ -\alpha e_1 & 0 & \alpha e_3 \\ -\alpha e_2 & -\alpha e_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta b_1 & \beta b_2 \\ -\beta b_1 & 0 & \beta b_3 \\ -\beta b_2 & -\beta b_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \alpha e_1 + \beta b_1 & \alpha e_2 + \beta b_2 \\ -\alpha e_1 - \beta b_1 & 0 & \alpha e_3 + \beta b_3 \\ -\alpha e_2 - \beta b_2 & -\alpha e_3 - \beta b_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \alpha e_1 + \beta b_1 & \alpha e_2 + \beta b_2 \\ -(\alpha e_1 + \beta b_1) & 0 & \alpha e_3 + \beta b_3 \\ -(\alpha e_2 + \beta b_2) & -(\alpha e_3 + \beta b_3) & 0 \end{pmatrix} \in V$$

- Consideremos ahora

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Claramente, dado $A \in V$, se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = aA_1 + bA_2 + cA_3$$

es decir, A se puede escribir como combinación lineal de A_1, A_2, A_3 y luego $\langle \{A_1, A_2, A_3\} \rangle = V$

P4. Sea $S = \langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}\rangle$ donde

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\5\\-1\\5\end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\4\\-1\end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix}2\\7\\0\\2\end{pmatrix}$$

Encuentre una base para el generador de S.

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\\1\end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\5\\-1\\5\end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\4\\-1\end{pmatrix} \quad v_5 = \begin{pmatrix}2\\7\\0\\2\end{pmatrix}$$

Consideremos la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{4^a = 4^a - 1^a \\ 5^a = 5^a - 2\cdot 1^a}]{\substack{2^a = 2^a - 1^a \\ 3^a = 3^a - 1^a}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{4^a = 4^a + 2^a \\ 5^a = 5^a - 3\cdot 2^a}]{\substack{1^a = 1^a - 2\cdot 2^a \\ 3^a = 3^a - 3\cdot 2^a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[5^a = 5^a + 4^a]{\substack{1^a = 1^a - 4\cdot 4^a \\ 2^a = 2^a + 4^a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-13\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$$