MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Nicolás Toro

Auxiliar 9

P1. Considere $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $T(z) = (1 + \sqrt{3}i) \cdot z$

a) Encuentre la matriz representante de T respecto a la base canonica $\beta_{\mathbb{C}} = \{1, i\}$ de $\mathbb{C}$, es decir $M_{\beta_{\mathbb{C}}\beta_{\mathbb{C}}}(T)$

b) Usando matrices de cambio de base, determine la matriz representante de T con respecto a la base $\beta = \{1 + i, 1 - i\}$. Es decir $M_{\beta\beta}(T)$. Explcite todas las matrices usadas.

P2. Sea $\mathcal{S}_2$ el espacio vectorial de las matrices simetricas de 2×2 con coeficientes reales. Dada $B \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ considere la transformación lineal $T : \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2$ definida por:

$$T(X) = BX + X^t B^t, \quad \text{con } X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$$

a) Verificar que T esta bien definida

b) Para $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ encuentre la matriz representante de T respecto a la base canónica de $\mathcal{M}_{22}(T)$ y la base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{S}_2$

c) Para $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ encuentre bases y dimensiones de $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$

P3. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación lineal $T(p)(x) = xp(x)$

a) Calcule la matriz representante de T con respecto a las bases canónicas

b) Calcule, usando cambio de bases, la matriz representante de T con respecto a las bases

$$\mathcal{A} = \{1, x - 1, (x - 1)^2\} \subseteq \mathbb{R}_2[x], \quad \mathcal{B} = \{1, -x.x^2, x^2 - x^3\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$$

P4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz representante con respecto a la base

$$\beta = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

en la partida y en la llegada es:

$$M_{\beta\beta}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre la matriz representante de T respecto a la base β en la partida y la base canónica en la llegada

b) Existen bases β_1,β_2 de $\mathbb{R}^3$ tales que $M_{\beta_1\beta_2}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

P1. Considere $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $T(z) = (1+\sqrt{3}i)\cdot z$

a) Encuentre la matriz representante de T respecto a la base canonica $\beta_{\mathbb{C}} = \{1, i\}$ de $\mathbb{C}$, es decir $M_{\beta_{\mathbb{C}}\beta_{\mathbb{C}}}(T)$

b) Usando matrices de cambio de base, determine la matriz representante de T con respecto a la base $\beta = \{1+i, 1-i\}$. Es decir $M_{\beta\beta}(T)$. Explcite todas las matrices usadas.

a) Notemos que $T(1) = 1+\sqrt{3}i = 1\cdot 1 + \sqrt{3}\cdot i$

Luego la primera columna es $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

De la misma forma

$$T(i) = (1+\sqrt{3}i)i = -\sqrt{3} + i = -\sqrt{3}\cdot 1 + 1\cdot i$$

Luego la segunda columna es $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Se concluye que $M_{\beta_c\beta_c}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

b) Considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \beta \arrow[r, "M_{\beta\beta}(T)"] \arrow[d, "M_{\beta\beta_c}(Id)"'] & \beta \\ \beta_c \arrow[r, "M_{\beta_c\beta_c}(T)"'] & \beta_c \arrow[u, "M_{\beta_c\beta}(Id)"'] \end{tikzcd}$$

$\beta_c = \{e_1, e_2\} = \{1, i\}$

$\beta = \{\beta_1, \beta_2\} = \{1+i, 1-i\}$

$\beta_1 = \boxed{1}e_1 + \boxed{1}e_2 = 1+i$

$\beta_2 = \boxed{1}e_1 \boxed{-1}e_2 = 1-i$

Recordemos que $M_{\beta_c\beta}(Id) = (M_{\beta\beta_c}(Id))^{-1}$

<u>obs</u>: en general son más faciles de trabajar las matrices que llegan a la base canónica.

Luego, siguiendo el camino hacia atrás: $M_{\beta\beta}(T) = (M_{\beta\beta_c}(Id))^{-1}\cdot M_{\beta_c\beta_c}(T)\cdot M_{\beta\beta_c}(Id)$

De la misma forma que la parte (a)

$$M_{\beta\beta_c}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (M_{\beta\beta_c}(Id))^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente:

$$M_{\beta\beta}(T) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

P2. Sea $\mathcal{S}_2$ el espacio vectorial de las matrices simetricas de 2×2 con coeficientes reales. Dada $B \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ considere la transformación lineal $T : \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2$ definida por:

$$T(X) = BX + X^t B^t, \quad \text{con } X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$$

a) Verificar que T esta bien definida

b) Para $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ encuentre la matriz representante de T respecto a la base canónica de $\mathcal{M}_{22}(T)$ y la base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{S}_2$

c) Para $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ encuentre bases y dimensiones de $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$

a) Verifiquemos que para X cualquiera, $T(X) \in \mathcal{S}_2$.
En efecto, sea $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, entonces
$$\begin{aligned}(T(X))^t &= (BX + X^t B^t)^t \\ &= (BX)^t + (X^t B^t)^t \\ &= X^t B^t + BX \\ &= T(X)\end{aligned}$$

$\therefore T(X) \in \mathcal{S}_2$.

b)
$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & c \\ c & 0 \end{pmatrix} = 2a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 2c \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & d \\ d & 0 \end{pmatrix} = 2b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 2d \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dada cada descomposición en los elementos de la base del espacio de llegada se trasponen como columnas de la matriz representante
$$M = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 2b & 0 \\ c & a & d & b \\ 0 & 2c & 0 & 2d \end{pmatrix}$$

c) Reemplazando los valores obtenidos en la parte anterior $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Esto quiere decir que $T(x)$ se puede representar vectorialmente por $T(X) = Mx$, con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
Luego escalonando el sistema $Mx = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Por T.N.I. se tiene que $\dim(\mathrm{Im}\,T) = 3$

Tendremos que
$$\begin{cases} x_4 \text{ libre} \\ x_3 = x_4 \\ x_2 = x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 = -x_3 = -x_4 \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Ker}(T) = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle \\ \dim(\mathrm{Ker}\,T) = 1 \end{cases}$$

P3. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación lineal $T(p)(x) = xp(x)$

a) Calcule la matriz representante de T con respecto a las bases canónicas

b) Calcule, usando cambio de bases, la matriz representante de T con respecto a las bases

$$\mathcal{A} = \{1, x-1, (x-1)^2\} \subseteq \mathbb{R}_2[x], \quad \mathcal{B} = \{1, -x.x^2, x^2 - x^3\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$$

a) Para encontrar la matriz representante c/r a estas bases $\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{B}}$, debemos escribir las imagenes de los elementos de $\bar{\mathcal{A}}$ sobre T, en terminos de los elementos de $\bar{\mathcal{B}}$, es decir:

- $T[1] = x \cdot 1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$
- $T[x] = x \cdot x = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$
- $T[x^2] = x \cdot x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3$

Luego, creamos la matriz representante:

$$M_{\bar{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{B}}}(T) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} T[1] & T[x] & T[x^2] \end{array} \end{array}$$

b) Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}_2[x])\ \mathcal{A} \arrow[r, "M_{\mathcal{AB}}(T)"] \arrow[d, "M_{\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}}(Id)"'] & \mathcal{B}\ (\mathbb{R}_3[x]) \\ (\mathbb{R}_2[x])\ \bar{\mathcal{A}} \arrow[r, "M_{\bar{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{B}}}(T)"'] & \bar{\mathcal{B}}\ (\mathbb{R}_3[x]) \arrow[u, "M_{\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}}(Id)"'] \end{tikzcd}$$

Luego $M_{\mathcal{AB}}(T) = M_{\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}}(Id) \cdot M_{\bar{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{B}}}(T) \cdot M_{\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}}(Id)$

- Para encontrar $M_{\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}}(Id)$, escribimos los elementos de $\mathcal{A}$ como combinación lineal de los elementos de $\bar{\mathcal{A}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ Id(1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \bullet\ Id(x-1) = -1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \bullet\ Id((x-1)^2) = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot x + 1 \cdot x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow M_{\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}}(Id) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Para encontrar $M_{\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}}(Id)$ debemos escribir los elementos de $\bar{\mathcal{B}}$ en función de los de $\mathcal{B}$.

$$\left.\begin{array}{l}
\cdot\ Id(1) = 1\cdot 1 + 0\cdot(1-x) + 0\cdot x^2 + 0\cdot(x^2-x^3) \\
\cdot\ Id(x) = 0\cdot 1 + (-1)\cdot(1-x) + 0\cdot x^2 + 0\cdot(x^2-x^3) \\
\cdot\ Id(x^2) = 0\cdot 1 + 0\cdot(1-x) + 1\cdot x^2 + 0\cdot(x^2-x^3) \\
\cdot\ Id(x^3) = 0\cdot 1 + 0\cdot(1-x) + 1\cdot x^2 + (-1)\cdot(x^2-x^3)
\end{array}\right\} \Rightarrow M_{\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$M_{\mathcal{U}\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$