

MA1102-3: Álgebra Lineal

Profesor: Alejandro Maass

Auxiliares: Nicolás Toro



Auxiliar 13

P1. Resuelva los siguientes problemas

- Sea A una matriz real de $n \times n$ que tiene n valores propios distintos. Muestre que $\det(A)$ equivale al producto de esos valores propios
- Sea A una matriz real triangular de $n \times n$. Muestre que sus valores propios están dados por los valores de la diagonal.
- Sea A una matriz real de $m \times n$. Muestre que cada valor propio de $A^T A$ es no negativo

P2. [Matrices simétricas]

- Para el caso $n = 2$, muestre que una matriz real simétrica A de $n \times n$ tiene valores propios reales.
- [Propuesto]** Muestre el caso general de lo anterior
- Sea A una matriz real simétrica de $n \times n$ y sean u, v vectores propios de A asociados a los valores propios λ, μ , con $\lambda \neq \mu$, respectivamente. Muestre que u y v son ortogonales.
- Muestre que A tiene diagonalización de la forma $A = UDU^T$

P3. a) Sea $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Se sabe que el polinomio característico de A es:

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 3)^2$$

y que los vectores:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

son vectores propios de A asociados al valor propio $\lambda = 3$. Se pide construir la matriz A

b) Considere la matriz $C \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ definida por:

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$ la matriz C es diagonalizable? Justifique su respuesta.