Auxiliar 1

P1. Calentando motores. Sean las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 2×1

Desarrolle las siguientes operaciones matriciales, cuando sea posible:

a) $-3 \cdot B + D$
b) $C + D$
c) $A \cdot C$
d) $C^t \cdot D \cdot A$
e) $B \cdot A$

a) $-3B + D$. 1) $-3 \cdot B = -3 \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 2 & -3 \cdot 9 \\ -3 \cdot 0 & -3 \cdot 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -6 & -27 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$

$-3B + D = \begin{pmatrix} -6 & -27 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+2 & -27+0 \\ 0+0 & -9+2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -4 & -27 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ //

b) Esta suma no está definida, ya que la suma matricial sólo se define para matrices de iguales dimensiones.

c) Esto no está definido pues el producto de 2 matrices $A \cdot B$ pide que A sea de $n \times m$ y B sea de $m \times p$

d) $C^T (D \cdot A) = (6 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1/2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\qquad 2 \times 2 \qquad 2 \times 3$

$\Rightarrow D \cdot A$ es de 2×3

$(DA) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ $\qquad \left[(DA)_{ij} = \sum_{k=1}^{2} D_{ik} \cdot A_{kj} \right]$

(A) Fila por columna.

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&7&-1\\1/2&3&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
a &= 2\cdot 2 + 0\cdot 1/2 = 4\\
b &= 2\cdot 7 + 0\cdot 3 = 14\\
c &= 2\cdot -1 + 0\cdot 4 = -2\\
d &= 0\cdot 2 + 2\cdot 1/2 = 1\\
e &= 0\cdot 7 + 2\cdot 3 = 6\\
f &= 0\cdot -1 + 2\cdot 4 = 8
\end{aligned}\right\} \quad DA = \begin{pmatrix}4&14&-2\\1&6&8\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^T\cdot(DA) = \left.\underbrace{\begin{pmatrix}6&-3\end{pmatrix}}_{1\times 2}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}4&14&-2\\1&6&8\end{pmatrix}}_{2\times 3}\right\} 1\times 3 \quad C^TDA = \begin{pmatrix}a&b&c\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow a &= 6\cdot 4 + (-3)\cdot 1 = 24 - 3 = 21\\
b &= 6\cdot 14 + (-3)\cdot 6 = 84 - 18 = 66\\
c &= 6\cdot(-2) + (-3)\cdot 8 = -12 - 24 = -36
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow C^TDA = \begin{pmatrix}21 & 66 & -36\end{pmatrix} \checkmark$$

e) $B\cdot A = \begin{pmatrix}17/2 & 41 & 34\\ 3/2 & 9 & 12\end{pmatrix}$

P2. Idempotentes. Una matriz P se dice *idempotente* si cumple: $P^2 = P$. Dado eso, demustre que:

a) Si P es idempotente, entonces:

$$\forall k \in \mathbb{N} : P^k = P$$

b) Si $A = (I - P)$, con P idempotente, entonces A es idempotente.

c) **Propuesto:** Si dos matrices A, B son tales que $A = AB \wedge B = BA$, entonces A y B son idempotentes.

P idempotente si $[P = P^2]$ $(\ast)$

a) PDQ P idempotente entonces $\forall k \in \mathbb{N}$ $P^k = P$

$k = 1$: PDQ : $P^1 = P$ directo

$k = 2$: PDQ $P^2 = P$ directo de $(\ast)$

$k = 3$: PDQ $P^3 = P$

$$P^3 = P \cdot P \cdot P = (P \cdot P) \cdot P = P^2 \cdot P \overset{(\ast)}{=} P \cdot P$$
$$= P^2 \overset{(\ast)}{=} P$$

$k = 4$ PDQ $P^4 = P$:

$$P^4 = P \cdot P \cdot P \cdot P \overset{\cdots}{=} P^2 \cdot P \cdot P \overset{\ast}{=} P^3 \underset{(\ldots)}{\overset{\text{CASO } k=3}{}} = P.$$

¿Cómo se formaliza esto? Inducción.

b) $[A = (I - P)]$ Con P idempotente. PDQ $A^2 = A$

En efecto sea P matriz idempotente y sea I la identidad de dimensiones correspondientes. Vemos que:

$$A^2 = (I - P) \cdot (I - P) = I(I - P) - P(I - P)$$
$$= I \cdot I - I \cdot P + (-P) \cdot I + (-P) \cdot (-P)$$
$$= I - P + (-P) + P^2 = I - 2P + \underbrace{P^2}_{P}$$
$$\overset{(\ast)}{=} I - 2P + P = [I - P = A]$$

Con lo que probamos lo pedido. ∎

c) Hint: ocupar Ninita Nipone

$$\left.\begin{array}{l} A = AB \\ B = BA \end{array}\right\} (\ast) \quad \text{PDQ} : \begin{array}{l} A^2 = A \\ B^2 = B \end{array}$$

P3. Me llaman el inversionista.

a) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ invertible , tal que cumple:

$$A \cdot (A^2 + 3A + I) = 0$$

Muestre que $A^{-1} = -A - 3I$

b) Sea $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ invertible y tal que $B^3 = 0$. Definimos, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$M(\lambda) = I + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2} B^2$$

Demuestre que $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$:

(i) $M(\lambda + \beta) = M(\lambda) \cdot M(\beta)$

(ii) $M(\beta) \cdot M(\lambda) = M(\lambda) \cdot M(\beta)$

(iii) $M(\lambda)$ es invertible y $M(\lambda)^{-1} = M(-\lambda)$ (**Hint:** analice $M(0)$ y use *(i)* para concluir)

Recordar que A es invertible si $\exists B$ tq

$AB = B \cdot A = I$

si existe es única y se denota $B = A^{-1}$

a) $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ invertible tal que

$A \cdot (A^2 + 3A + I) = 0 \quad (\ast)$

PDQ $A^{-1} = -A - 3I$

En efecto sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ invertible que cumple $(\ast)$ notemos lo siguiente. Por $(\ast)$

$A \cdot (A^2 + 3A + I = 0 \quad / \; A^{-1} \cdot$

$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} (A^2 + 3A + I) = A^{-1} \cdot 0 \Big\} \; 0$

$\Rightarrow \quad A^2 + 3A + I = 0 \quad \Rightarrow \quad I = -A^2 - 3A = A(-A) + A(-3I)$

$= A(-3I - A)$

$\begin{cases} A^k = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A \\ A \cdot I = I \cdot A \end{cases}$

y similarmente:

$I = -A^2 - 3A = -A \cdot A - 3I \cdot A = (-A - 3I) \cdot A$

$\Rightarrow A^{-1} = (-3A - I)$ con lo que probamos lo pedido pues la inversa de A es única.

b) Sea $B \in M_{nn}(\mathbb{R})$ invertible que cumple $\left[B^3 = 0\right]$ (*)

Definimos la función $M : \mathbb{R} \to M_{nn}(\mathbb{R})$

Dada por: $\left[M(\lambda) := I + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2} B^2\right]$

PDQ $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$:

(i) $M(\lambda+\beta) = M(\lambda)\cdot M(\beta)$. En efecto:

$$M(\lambda)\cdot M(\beta) = \left(I + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2} B^2\right)\cdot\left(I + \beta B + \frac{\beta^2}{2} B^2\right)$$

$$= I + \beta B + \frac{\beta^2}{2} B^2 + \lambda B + \lambda\beta B^2 + \frac{\lambda\beta^2}{2} B^3$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2} B^2 + \frac{\lambda^2\beta}{2} B^3 + \frac{\lambda^2\beta^2}{4} B^4$$

*

$$= I + \beta B + \frac{\beta^2}{2} B^2 + \lambda B + \lambda\beta B^2 + \frac{\lambda^2}{2} B^2 + \underbrace{\frac{\lambda^2\beta^2}{2} B^4}_{0}$$

Pero: $B^4 = B^3\cdot B = \underset{\searrow \text{matriz}}{0}\cdot B = 0$

$$\Rightarrow M(\lambda)\cdot M(\beta) = I + \beta B + \frac{\beta^2}{2} B^2 + \lambda\beta + \lambda\beta B^2 + \frac{\lambda^2}{2} B^2$$

$$= I + (\lambda+\beta) B + \underbrace{\left(\frac{\lambda^2}{2} + \lambda\beta + \frac{\beta^2}{2}\right)}_{\frac{\lambda^2+2\lambda\beta+\beta^2}{2} = \frac{(\lambda+\beta)^2}{2}} B^2$$

$$= I + (\lambda+\beta) B + \frac{(\lambda+\beta)^2}{2}\cdot B^2 = M(\lambda+\beta) \blacksquare$$

(ii) Ocupar (i)

(iii) Ocupar (ii) y (i) y calcular $M(0)$

P4. Diagonales. Una matriz diagonal es una matriz cuadrada D que cumple que todos sus coeficientes d_{ij} con $i \neq j$, es decir, los no que están en la "diagonal" de la matriz, son ceros. Por consiguiente, los coeficientes d_{ii} (la diagonal de la matriz) son los únicos que **pueden** ser no nulos (pero pueden ser 0 también; por ejemplo, una matriz de sólo ceros es una matriz diagonal).

Sea D una matriz diagonal de $n \times n$, A una matriz cualquiera de dimensiones $p \times n$, y B una matriz de dimensiones $n \times q$. Describa de manera precisa los productos matriciales $A \cdot D$ y $D \cdot B$. Esto es, escriba una expresión para los coeficientes $(ad)_{ij}$ y $(db)_{ij}$.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \longrightarrow D_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

$i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = D_{11} \\ \lambda_2 = D_{22} \\ \vdots \\ \lambda_n = D_{nn} \end{array}\right\} \text{PUEDEN ser no nulos}$$

Queremos estudiar $A \cdot D$ y $D \cdot B$. Vamos a estudiar $D \cdot B$. $A \cdot D$ en pauta.

Sea D diagonal de $n \times n$, $B \in M_{n \times q}(\mathbb{R})$.

Tenemos que: (DB) será de $n \times q$. Entonces sea $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, q\}$. Calculamos:

$$(DB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} D_{ik} \cdot B_{kj}$$

Como D es diagonal $D_{ik} = 0 \quad \forall k \neq i$

Luego la suma tiene la sgte forma:

$$\sum_{k=1}^{n} D_{ik} \cdot B_{kj} = \underbrace{D_{i1}}_{0} \cdot B_{1j} + \underbrace{D_{i2}}_{0} \cdot B_{2j} + \ldots + \underbrace{D_{ii}}_{\lambda_i} \cdot B_{ij} + \ldots$$

$$= \lambda_i \cdot B_{ij}$$

$$(DB)_{ij} = \lambda_i \cdot B_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{array}{c} i=1 \\ \vdots \\ i=n \end{array} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1q} \\ \vdots & & & \\ B_{n1} & & \cdots & B_{nq} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 B_{11} & \lambda_1 B_{12} & \lambda_1 B_{13} & \ldots & \lambda_1 B_{1q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_n B_{n1} & \lambda_n \cdot B_{n2} & \cdots & & \end{pmatrix} \begin{array}{c} i=1 \\ \vdots \\ i=n \end{array} \longrightarrow$$

Multiplicar "B" por una diagonal por la izq. Corresponde a ponderar cada fila "i" de B por el λ_i correspondiente

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 \\ -7 & 19 & 21 & 7 \\ 32 & 48 & 56 & 19 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 3 & 3\cdot 4 & 3\cdot 7 \\ -1\cdot -7 & -1\cdot 19 & -1\cdot 21 & -1\cdot 7 \\ 8\cdot 32 & 8\cdot 48 & 8\cdot 56 & 8\cdot 19 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot D = \ldots$$