Auxiliar #3

P1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 10 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -5 & 6 \\ 1/2 & 1/2 & -3/2 & 13/2 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_{12}(-3) \\ E_{13}(1) \\ E_{14}(-1/2)}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & -15 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -7 \end{array}\right)$$

Notamos que el lado izquierdo es una matriz triangular superior que no tiene ceros en la diagonal, por lo tanto, es invertible!

P2 Vemos que el sistema queda:

$$\begin{aligned} 4p + 5b + g + 5c &= 13.450 \\ 8p + 11b + 2g + 8c &= 26.600 \\ 4p + 7b + 4g + 3c &= 15100 \\ 3b + 8g + 8c &= 15.000 \end{aligned}$$

Lo cual matricialmente se escribe:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p & b & g & c \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 5 & 1 & 5 & 13450 \\ 8 & 11 & 2 & 8 & 26600 \\ 4 & 7 & 4 & 3 & 15100 \\ 0 & 3 & 8 & 8 & 15000 \end{array}\right) \end{array}$$

Escalonemos para resolver el sistema:

$$\xrightarrow[\substack{E_{12}(-2) \\ E_{13}(-1)}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 5 & 1 & 5 & 13450 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -300 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 1650 \\ 0 & 3 & 8 & 8 & 15000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{E_{23}(-2) \\ E_{24}(-3)}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 5 & 1 & 5 & 13450 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -300 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2250 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 15900 \end{array}\right)$$

Ahora podemos permutar las columnas 3 y 4 y luego las filas 3 y 4, con lo que obtenemos:

$$
\begin{array}{cccc}
p & b & c & g \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
4 & 5 & 5 & 1 & 13450 \\
0 & 1 & -1 & 0 & -300 \\
0 & 0 & 11 & 8 & 15900 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 2250
\end{array}\right)
$$

Luego, nos pasamos a ecuaciones:

(i) $4p + 5b + 5c + g = 13450$

(ii) $b - c = -300$

(iii) $11c + 8g = 15900$

(iv) $3g = 2250$

De (iv) obtenemos que:

$$\Rightarrow g = \frac{2250}{3} = 750$$

de esto y (iii):

$$\Rightarrow 11c + 8g = 15900$$

$$\Rightarrow 11c = 15900 - 8 \cdot 750 = 9900$$

$$\Rightarrow c = 900$$

Con esto y (ii): $b = -300 + c = 600$

y de (i): $4p = 13450 - 750 - 5 \cdot 900 - 5 \cdot 600$

$$\Rightarrow p = 1300$$

Así: $\begin{pmatrix} p \\ b \\ g \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1300 \\ 600 \\ 750 \\ 900 \end{pmatrix}$

P3

Antes que nada, escribimos el sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3-\alpha & \alpha \\ 1 & 0 & 1 & \alpha+5 & \beta \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 2\alpha+4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{E_{12}(-1)\\E_{13}(-1)\\E_{14}(-1)}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & -2 & 0 & \alpha+2 & \beta-1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\alpha+3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{E_{23}(2)\\E_{24}(-1)}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha & 2\alpha+\beta-3 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha+4 \end{array}\right)$$

Permutamos 3ª y 4ª fila:

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha+4 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha & 2\alpha+\beta-3 \end{array}\right)$$

Tenemos 3 casos:
- No hay soluciones
- Hay infinitas soluciones
- Hay una solución

* No hay soluciones: para esto buscamos una ecuación del estilo $\left[\, 0 \cdot X \neq 0 \,\right]$

Así, necesitamos:

$$2-\alpha = 0 \quad \wedge \quad 2\alpha+\beta-3 \neq 0$$

$$\Rightarrow \left[\, \alpha = 2 \quad \wedge \quad \beta \neq -1 \,\right]$$

* Infinitas soluciones $\Leftrightarrow$ se busca una ecuación de tipo:

$$\left[0 \cdot x = 0\right]$$

Pues todo $x \in \mathbb{R}$ cumple esto

Luego lo que buscamos es: $\cdot\ 2 - \alpha = 0$

$\cdot\ 2\alpha + \beta - 3 = 0$

$\Rightarrow \alpha = 2 \wedge \beta = -1$. Así, la matriz queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Pasemos esto a ecuaciones:

(i) $a + 2b + c + 3d = 1$
(ii) $b - 2d = 1$
(iii) $c + d = 6$
(iv) $0 \cdot d = 0 \longrightarrow d$ es variable libre

Luego de (iii): $c = 6 - d$

Luego de (ii): $b = 1 + 2d$

Luego de (i) $a = 1 - 3d - (6-d) - 2(1+2d)$

$\Rightarrow a = -7 - 4d$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7-4d \\ 1+2d \\ 6-d \\ d \end{pmatrix}$$

Finalmente, para cualquier otro caso, se tiene que existe solución única. Estudiemos el caso $\alpha = \beta = 1$:

La matriz queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Pasándonos a ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&(i) \quad a+2b+c-3d = 1 \\
&(ii) \quad b-d = 0 \\
&(iii) \quad c+d = 5 \\
&(iv) \quad d = 0
\end{aligned}$$

de (iv) $d=0$

$\Rightarrow$ de (iii) $c=5$

$\Rightarrow$ de (ii) $b=0$

$\Rightarrow$ de (i) $a = 1-2\cdot 0-5+3\cdot 0 = -4$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

P4) NOTA: • Al final sí se puede eliminar varias filas a la vez :c me había enredado con otro concepto.

• Lo que sí se mantiene es que les recomiendo fuertemente NO permutar filas/columnas para estos cálculos.

Ya que para chequear invertibilidad necesitamos escalonar A y luego para invertirla (de poder) debemos escalonar (A|I), comenzamos con (A|I) directamente para ahorrar tiempo.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & -4/3 & 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 4/3 & 4/3 & -1/3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/9 & -4/3 & 1/3 & -1/9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4/9 & 4/3 & -1/3 & -2/9 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora "fabricamos" unos en la diagonal para que sea más fácil pivotar hacia arriba:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Ahora, escalonamos hacia arriba:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{13}{6} & -\frac{23}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$