Auxiliar 8: TL's

P1. Entendamos qué sucede realmente. Sean V, W espacios vectoriales, y $T : V \to W$ una transformación lineal. Muestre que:

a) Si T inyectiva, preserva conjuntos l.i.

b) T es inyectiva $\iff dim(Im(T)) = dim(V)$

c) **Propuesto.** Si T inyectiva, preserva sumas directas.

Nota: en a), la implicancia para el otro lado también se tiene.

Consideramos $\dim(V) < \infty$. V de dim: n.

a) T inyectiva $\Rightarrow$ ($B \subseteq V$ l.i. $\Rightarrow TB = \{Tb : b \in B\}$ es l.i.)

En efecto: sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot T(b_i) = 0$ PDQ $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Notemos que por linealidad:

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T b_i = T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i\right) = 0$

y como T es inyect. tenemos $\ker(T) = \{0\}$

Con esto: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i = 0$

PERO: B es l.i., luego $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Con lo que probamos lo pedido

b) T inyectiva $\iff \dim(Im(T)) = \dim(V)$

$\Rightarrow$) Sea T inyectiva. Notamos que:

$\dim(V) \geq \dim(Im(T))$ esto pues:

Sea B base de V. Veremos que TB genera $Im(T)$. $\rightarrow$ Siempre (no pide inyectividad)

En efecto sea $w \in Im(T)$. Por def de $Im(T)$: $\exists v \in V$ tq $Tv = w$. Pero, como B es base de V

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i$

Luego:

$$T(v) = w$$

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot Tb_i$$

$\Rightarrow$ esto, por def, es que $w \in \langle TB \rangle$

Luego $\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq |TB| \leq |B| = \dim(V)$

Ahora veamos que $\dim(V) \leq \dim(\mathrm{Im}(T))$

En efecto:

B es base de V, es l.i. Por a) (usamos inyect.)

$\Rightarrow TB \subseteq W$ es l.i.

$\Rightarrow \exists U$ base de W tq $U \supseteq TB$

Luego $\underset{\dim(V)}{\overset{\shortparallel}{|B|}} \underset{\text{inyect.}}{=} |TB| \leq |U| = \dim(\mathrm{Im}(T))$

Con lo que en resumen probamos

T inyectiva $\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(V)$

$\Leftarrow$) Sea $T: V \to W$ lineal tq. preserva conjuntos l.i. entonces T es inyectiva

Si no lo fuese:

$\exists v_1, v_2 \in V$ tq $v_1 \neq v_2 \wedge Tv_1 = Tv_2$

Entonces: $\exists w \in W$ tq

$Tv_1 = Tv_2 = w$. Sea $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ base de V

i) $Tv_1 = w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot Tb_i$

$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\right)$

$\underset{\text{linealidad}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \alpha_i) Tb_i = 0$

Como T preserva cjtos. l.i.
TB es l.i.
$\Rightarrow TB$ es base de $\mathrm{Im}(T)$

y como TB es l.i. : $\lambda_i - \alpha_i = 0 \ \forall i$

$\Rightarrow \lambda_i = \alpha_i \ \forall i$, luego:

$$v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i$$

Análogamente podemos hacer el mismo razonamiento para v_2 $\Rightarrow v_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i = v_1$

Pero $v_2 \neq v_1$ por hipótesis $\Rightarrow$ $\Leftarrow$ Luego T es inyectiva.

Con esto se prueba lo pedido.

P2. Básicos Sea $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, escríbalo en las siguientes bases:

a) $B_1 = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$

b) $B_2 = \{(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)\}$ (considere $a, b, c \neq 0$)

c) $B_3 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; v = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Queremos encontrar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$v = \lambda_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En efecto ; es claro que $\lambda_3 = x$; $\lambda_2 = y$; $\lambda_1 = z$

Luego $[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$

b) $$v = \lambda_1\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 \cdot a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \cdot a = x \; ; \; \lambda_2 \cdot b = y \; ; \; \lambda_3 \cdot c = z$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{x}{a} \; ; \; \lambda_2 = \frac{y}{b} \; ; \; \lambda_3 = \frac{z}{c}.$$

$$\Rightarrow [v]_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{x}{a} \\ \frac{y}{b} \\ \frac{z}{c} \end{pmatrix}.$$

c) $$v = \lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left.\begin{matrix} \lambda_3 = x - y \\ \lambda_2 = y - z \\ z \end{matrix}\right\} [v]_{B_3} = \begin{pmatrix} z \\ y - z \\ x - y \end{pmatrix}$$

P3. Cositas Considere la siguiente función $L : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

$$L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (b+c)x^3 - ax^2 + (5d-2a)x + c + b - d$$

a) Muestre que L es lineal.

b) Encuentre $ker(L)$, una base el mismo, y su dimensión.

c) Encuentre $Im(L)$, una base el mismo, y su dimensión.

d) Estudie la inyectividad y sobreyectividad de L.

a) En efecto sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$

PDQ: $L\left(\lambda_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = \lambda_1 L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda_2 L\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

En efecto:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a + \lambda_2 e & \lambda_1 b + \lambda_2 f \\ \lambda_1 c + \lambda_2 g & \lambda_1 d + \lambda_2 h \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L\left(\lambda_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) &= (\lambda_1 b + \lambda_2 f + \lambda_1 c + \lambda_2 g)x^3 \\ &- (\lambda_1 a + \lambda_2 e)x^2 \\ &+ [5(\lambda_1 d + \lambda_2 h) - 2(\lambda_1 a + \lambda_2 e)]x \\ &+ \lambda_1 b + \lambda_2 f + \lambda_1 c + \lambda_2 g - \lambda_1 d - \lambda_2 h \end{aligned}$$

Separamos términos convenientemente

$$\begin{aligned} &= \lambda_1 (bx^3 + cx^3 - ax^2 + 5dx - 2ax + b + c - d] \\ &+ \lambda_2 (fx^3 + gx^3 - ex^2 + 5hx - 2ex + f + g - h] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lambda_1 [(b+c)x^3 - ax^2 + (5d-2a)x + b + c - d] \\ &+ \lambda_2 [(f+g)x^3 - ex^2 + (5h-2e)x + f + g - h] \end{aligned}$$

$$= \lambda_1 \cdot L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda_2 L\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$ con lo ~~que~~ L es lineal.

b) ¿ $\ker(L)$? sea $M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tq $L(M) = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(b+c)x^3 - ax^2 + (5d - 2a)x + b + c - d = 0 \to \text{cero polinomio}$$

$$= 0 \cdot x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ -a = 0 \\ 5d - 2a = 0 \\ b + c - d = 0 \end{cases} \to a = 0, \quad d = 0 \qquad b = -c$$

todos los vectores $\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(L)$.

Luego: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\ker(L)$

Así: $\dim(\ker(L)) = 1$

c) ¿ $Im(L)$? sea $p = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \in Im(L)$

Veamos restricciones sobre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

sea $M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$: $LM = p$ con $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$(b+c) = \alpha$; $-a = \beta$; $5d - 2a = \gamma$; $b + c - d = \delta$

Sist. lineal !!! :D

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ -2 & 0 & 0 & 5 & \gamma \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \delta \end{array}\right) \longrightarrow$$

¿Para qué valores de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ esto tiene solución?

Escalonamos

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 5 & \gamma - 2\beta \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \delta \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 5 & \gamma - 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \delta - \alpha \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 5d = \gamma - 2\beta \\ -d = \delta - \alpha \end{matrix} \Bigg\} \frac{\gamma - 2\beta}{5} = \alpha - \delta \implies \alpha = \frac{\gamma - 2\beta}{5} + \delta$$

$$\operatorname{Im}(L) = \left(\frac{\gamma - 2\beta}{5} + \delta\right)x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

$$\left\{ \frac{x^3}{5} + x \,,\; \frac{-2}{5}x^3 + x^2 \,,\; x^3 + 1 \right\}$$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(L)) = 3$

d) como $\ker(L) \neq \{0\} \longrightarrow L$ no es inyectiva.

y como

$$x^2 + x + 1 \notin \operatorname{Im}(L)$$

$\gamma = \beta = \delta = 1 \quad \Rightarrow \alpha = \frac{1-2}{5} + 1 = \frac{4}{5} \neq 0$

$\Rightarrow L$ no es sobreyectiva $\blacksquare$