Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y CC

Autores: Miguel Martínez Concha
Carlos Silva Cornejo
Emilio Villalobos Marín

1 Ejercicios Resueltos

(ejemplar de prueba)

Mediante la inclusión de ejercicios resueltos se espera que los estudiantes tengan portunidad de movilizar sus capacidades para buscar, analizar, procesar, representar y comunicar diferentes tipos de información, decodificando y traduciendo la información contenida en las funciones, gráficos, series de Fourier, integrales de Fourier y sus propiedades.

1.1 Problema 1.

i) Desarrollar en serie de Fourier la función periódica de período 2π .Representar graficamente y estudiar la convergencia de la serie en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Solución:
i) Calculo de los coeficientes de Fourier.

$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \left[\int\limits_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx \right] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} xdx$

$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx$

Usando el método de integración por partes se tiene:

$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[0 - 0 + \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right]$

$a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ -\frac{2}{n^2\pi} & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$

así:

$a_{2n} = 0 \qquad \forall\ n$

$a_{2n-1} = -\frac{2}{(2n-1)^2\pi}\ \forall\ n.$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} x\sin(nx)dx$

$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-x\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} = -\frac{\cos(n\pi)}{n}$

luego el coeficiente es:

$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Por lo tanto, la serie de Fourier será:

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2}{\pi \left(2n-1\right)^2} \cos\left(\left(2n-1\right)x\right) + \frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n} \sin(nx) \right]$$

En todos los puntos de continuidad la serie converge a $f(x)$ y en los puntos de discontinuidad del tipo $x = \pi + 2n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$, la serie converge a $\frac{\pi}{2}$.

ii) A partir del resultado anterior obtenga la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Solución.(*ii*)
Evaluando en $x = 0$ se tiene

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...\right)$$

de donde

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...\right)$$

y de aquí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

1.2 Problema 2

i) Desarrollar en serie de Fourier la función periódica de período 2π, definida por:

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

ii) A partir del resultado obtenido calcular la suma de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

iiI) Determine la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Solución:
i) La función f es par por lo cual obtendremos una serie de cosenos, que tiene la forma:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi x^2dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}$
$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x^2\cos(nx)dx$
$a_n = \left[\frac{x^2\sin(nx)}{n} + \frac{2x\cos(nx)}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$
Luego, la serie es:

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

Como la función es continua en $\mathbb{R}$,entonces:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\,, \quad \text{todo } x \text{ real.}$$

Solución (ii)

La serie numérica se puede obtener haciendo $x = \pi$ y $f(\pi) = \pi^2$,

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - ...\right)$$

de donde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

$iii)$ Como la función f es seccionalmente suave para $-\pi \le x \le \pi$ y $f(-\pi) = f(\pi)$ se cumplen
las condiciones de suficiencia de la identidad de Parseval entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[x^2\right]^2dx &= 2\left[\frac{\pi^2}{3}\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4(-1)^n}{n^2}\right]^2 \Longrightarrow \\
\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi} &= \frac{2}{9}\pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} \Longrightarrow \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^4}{90}
\end{aligned}$$

1.3 Problema 3

Sea $f(x) = x(\sin x)$, si $-\pi < x < \pi$, entonces:

$i)$ Determine la serie de esta función.

$ii)$ Pruebe la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} = \frac{1}{4}$$

Solución:
$i)$ La función $f(x)$ es par, es decir $f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in (-\pi, \pi)$, entonces:
$b_n = 0$
$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin x dx = \frac{1}{\pi}\left[\left[x\left(-\cos x\right)\right]_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi}\cos x dx\right] = 1$
$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin x\cos(nx)dx$
Para $n \neq 1$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\left[\sin\left(\left(n+1\right)x\right) - \sin\left(\left(n-1\right)x\right)\right]dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}$
Para $n = 1$
$a_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin x\cos x dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin(2x)dx = -\frac{1}{2}$
Por lo tanto, la serie es:

$$x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos\left(nx\right)$$

$ii)$ En $x = 0$ hay un punto de continuidad de la función, entonces la serie converge a $f(0)$

$$f(0) = 0 = 1 - \frac{1}{2}\cos 0 + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos\left(0\right)$$

Finalmente

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} = \frac{1}{4}$$

1.4 Problema 4

$i)$ Para $f(x) = e^{-[x]}$, $0 \leq x \leq 2$ obtener su serie de Fourier en cosenos, periódica de período 4.
$ii)$ Del resultado determinar la convergencia de:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

Solución: Evaluando la función parte entera tenemos

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ e^{-1} & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ e^{-2} & \text{si} \quad x=2 \end{cases}$$

Con extensión par $f_p(x)$ de $f(x)$ se obtiene la serie:

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2}$$

$a_0=\frac{1}{2}\left[\int\limits_0^1 1dx+\int\limits_1^2 e^{-1}dx\right]=\frac{1}{2}\left[1+e^{-1}\right]$

$a_n=\left[\int\limits_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int\limits_1^2 e^{-1}\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right]=\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}|_0^1+e^{-1}\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}|_1^2$

$=2\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}+2e^{-1}\frac{\sin n\pi-\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}=2\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\left[1-e^{-1}\right]$

Finalmente, la serie es:

$$\frac{1+e^{-1}}{2}+2(1-e^{-1})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

ii) Convergencia de $x_0=2$ punto de discontinuidad con límites laterales e^{-1} se tiene convergencia:

$$e^{-1}=\frac{1+e^{-1}}{2}+2(1-e^{-1})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\cos n\pi$$

$$\frac{e^{-1}-1}{2}=2(1-e^{-1})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\cos n\pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

1.5 Problema 5

Utilice la serie de Fourier para demostrar la identidad trigonométrica

$$\sin^3(x)=\frac{3}{4}\sin(x)-\frac{1}{4}\sin(3x)$$

Solución:

Se calcula la serie de Fourier de $f(x)=\sin^3(x)$ en $[-\pi,\pi]$. Como $f\ (x)$ es impar la serie será:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\pi \quad \text{con } b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin^3(x)\sin(nx)dx$$

En primer lugar, calculemos la integral para $n \neq 1$

$\int_0^\pi \sin^3 x \sin nx dx = \left[-\sin^3 x \frac{\cos nx}{n}\right] |_0^\pi + \frac{3}{n}\int_0^\pi \sin^2 x \ \cos x \ \cos nx dx$

Usando la identidad trigométrica: $\cos x \cos nx = \frac{\cos(n-1)x \ - \ \cos(n+11)x}{2}$

$= \frac{3}{2n}\int_0^\pi \sin^2 x \left[\cos(n-1)x - \cos(n+1)x\right] dx \qquad (1)$

En segundo lugar, calculemos el valor del coeficiente b_1 para $n = 1$ en (1)

$b_1 = -\frac{1}{\pi}\frac{3}{2}\int_0^\pi \sin^2 x \ \cos 2x dx = -\frac{3}{4\pi}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\cos 2x dx = \frac{3}{4\pi}\int_0^\pi \frac{1-\cos 4x}{2}dx$

$b_1 = \frac{2\cdot 3}{4\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}$

En tercer lugar, para $n > 1$ en (1)

$b_n = \frac{3}{2n}\left[\sin^2 x\left(\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right)|_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right)\sin 2x dx\right]$

$b_n = -\frac{3}{2n}\int_0^\pi \left(\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right)\sin 2x dx$

Usando la identidad trigonometrica

$b_n = -\frac{3}{2n}\frac{1}{n+1}\frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(n+1)x - \cos(n+3)x)\, dx$

$-\frac{3}{2n}\frac{1}{n-1}\frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(n-3)x - \cos(n+1)x) dx = 0, \qquad \forall\ n \neq 3$

Para $n = 3$ el cálculo directo, produce:

$b_3 = -\frac{3}{2\cdot 3\cdot 2}\frac{\pi}{2}\frac{2}{\pi} = -\frac{1}{4}$

Por lo tanto, la serie de Fourier resultante es:

$$\frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

Luego, por el teorema de la convergencia dada la continuidad de f se tiene lo requerido.

1.6 Problema 6

Halle la representación de la integral de Fourier de la función $f(t) = e^{-at}$ si $t > 0$ considerando una extensión par de $f(t)$ y estudie la convergencia en $\mathbb{R}$.

Solución:

Sea $f_p(t) = \begin{cases} e^{-at} \ si \ t > 0 \\ e^{at} \ si \ t < 0 \end{cases}$,así definida es una función par, luego:

$$
\begin{aligned}
A(w) &= 2\int_0^\infty f(u)\cos(wu)du = 2\int_0^\infty e^{-au}\cos(wu)du \\
&= 2\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-au}\cos(wu)du \\
&= 2\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-au}}{a^2+w^2}\left(-a\cos(wu)+w\sin(wu)\right)\right]_0^b \\
&= 2\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-ab}}{a^2+w^2}\left(-a\cos(wb)+w\sin(wb)\right)+\frac{a}{a^2+w^2}\right] \\
&= \frac{2a}{a^2+w^2}
\end{aligned}
$$

Entonces la integral de Fourier de $f(t)$ es:

$$
\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{2a}{a^2+w^2}\cos(wx)dw = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(wx)}{a^2+w^2}dw
$$

Como la funcion es continua en $\mathbb{R}$,aplicando el criterio de la convergencia, la integral converge a $f(t)$:

$$
\int_0^\infty \frac{\cos(wx)}{a^2+w^2}dw = \frac{\pi}{2a}e^{-ax}
$$

1.7 Problema 7

Halle la representación de la integral de Fourier de la función $f(x) = xe^{-|x|}$ si $x \in (-\infty, \infty)$ y estudie su convergencia en $\mathbb{R}$.

Solución:

Se tiene que $f(x)$ es una función impar. Examinemos, si se cumplen las condiciones de existencia de integral de Fourier.

En primer lugar

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \left|xe^{-|x|}\right| dx &= 2\int_0^\infty xe^{-x}dx \\
&= 2\left[-xe^{-x}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx\right] \\
&= 2\cdot 1 = 2
\end{aligned}
$$

Además, f es continua y diferenciable $\forall x$.
Los coeficientes de Fourier de f son:

$$\begin{aligned} A(w) &= 0 \text{ ya que } f \text{ es una función impar} \\ B(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} ue^{-|u|}\sin(wu)du = \frac{4w}{(1+w^2)^2} \end{aligned}$$

Entonces, para todo x la integral de Fourier converje a:

$$xe^{-x} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{w}{(1+w^2)^2}\sin(wx)dw$$

1.8 Problema 8

Sea f la función pulso rectangular unitario de período 2 definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta} & si \quad -\delta < x < \delta \\ 0 & si \quad -1 \leq x < \delta \ \textbf{ó} \ \delta < x \leq 1 \end{cases}$ a) Representar graficamente $f(x)$

b) Obtener la serie de Fourier de $f(x)$.

c) Si $a_n(\delta)$ es el coeficiente n-ésimo de la serie anterior, calcular los límites:

$$\lim_{n\to\infty}(\lim_{\delta\to 0^+}(a_n(\delta)), \quad \lim_{\delta\to 0^+}(\lim_{n\to\infty}(a_n(\delta)))$$

Solución:

b) Como f es una función par de período 2 ,entonces :

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\delta}\frac{1}{2\delta}dx = \frac{1}{2} \\ a_n &= 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)dx = 2\int_0^{\delta}\frac{1}{2\delta}\cos(n\pi x)\,dx = \frac{1}{\delta}\frac{sen(n\pi\delta)}{n\pi} = a_n(\delta) \\ b_n &= 0 \quad \forall n \end{aligned}$$

Luego, se tiene que:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\delta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(n\pi\delta)}{n\pi}\cos(n\pi x), \quad x \in [-1,1]$$

c) En primer lugar calculemos:

$$\lim_{\delta\to 0^+}(\lim_{n\to\infty}(a_n(\delta))) = \lim_{\delta\to 0^+}(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\delta}\frac{sen(n\pi\delta)}{n\pi}) = \lim_{\delta\to 0^+}(0) = 0$$

En segundo lugar

$$\lim_{n\to\infty}(\lim_{\delta\to 0^+}(a_k(\delta)) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{1}{\delta}\frac{sen(n\pi\delta)}{n\pi}\right)) = \lim_{n\to\infty}(1) = 1$$

1.9 Problema 9.

Dada la función $f(x) = xe^{-x}$ con $x \geqslant 0$,

a) Verifique que considerando las extensiones par e impar de la función f:

$$\int_0^\infty \left[\frac{1-w^2}{(1+w^2)^2}\right]\cos wx\, dw = \int_0^\infty \left[\frac{2w}{(1+w^2)^2}\right] senwx\, dw$$

b) Estudiar la convergencia de la IF parar deducir que:

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{(1+w^2)^2}\right] dw = \int_0^\infty \left[\frac{w^2}{(1+w^2)^2}\right] dw$$

Solución

Consideremos para $f(x) = xe^{x}$ con $x \geqslant 0$ la extensión par

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \begin{cases} xe^{-x} & si \quad x \geqslant 0 \\ -xe^{x} & si \quad x < 0 \end{cases} \implies \\ f_p(x) &\sim \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(w)\cos wxdw \quad \text{con } A(w) = 2\int_0^\infty xe^{-x}\cos wx\, dx \end{aligned}$$

Ahora, consideremos la extensión impar de f

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \begin{cases} xe^{-x} & si \quad x \geqslant 0 \\ xe^{x} & si \quad x < 0 \end{cases} \implies \\ f_i(x) &\sim \frac{1}{\pi}\int_0^\infty B(w)\, senwxdw \quad \text{con } B(w) = 2\int_0^\infty xe^{-x} senwx\, dx \end{aligned}$$

Podemos calcular los coeficientes $A(w)$ y $B(w)$ integrando por partes:

$$
\begin{aligned}
A(w) &= 2\int_0^{\infty} xe^{-x}\cos wx\ dx \implies \\
A(w) &= 2\left[\frac{xe^{-x}(-\cos wx + wsenwx)}{(1+w^2)} - \frac{e^{-x}((1-w^2)\cos wx - 2wsenwx)}{(1+w^2)^2}\right]_0^{\infty} \\
A(w) &= 2\left[\frac{1-w^2}{(1+w^2)^2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B(w) &= 2\int_0^{\infty} xe^{-x}senwx\ dx \implies \\
B(w) &= 2\left[\frac{xe^{-x}(-senwx - w\cos wx)}{(1+w^2)} - \frac{e^{-x}((1-w^2)\,senwx + 2w\cos wx)}{(1+w^2)^2}\right]_0^{\infty} \\
B(w) &= 2\left[\frac{2w}{(1+w^2)^2}\right]
\end{aligned}
$$

Construyendo las respectivas integrales de Fourier y aplicando el teorema de la convergencia , puesto que f es una función seccionalmente $\forall x \geqslant 0$,se tiene que :

$$
\begin{aligned}
xe^{-x} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{1-w^2}{(1+w^2)^2}\right]\cos wxdw \\
xe^{-x} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{2w}{(1+w^2)^2}\right]senwxdw
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, las extensiones son iguales:

$$
\int_0^{\infty}\left[\frac{1-w^2}{(1+w^2)^2}\right]\cos wx\ dw = \int_0^{\infty}\left[\frac{2w}{(1+w^2)^2}\right]senwx\ dw
$$

b) En $x = 0$ se tiene un punto en que estas extensiones son continuas, luego ambas integrales convergen a $f(0) = 0$

$$
\int_0^{\infty}\frac{1-w^2}{(1+w^2)^2}\ dw = 0 \implies \int_0^{\infty}\frac{1}{(1+w^2)^2}\ dw = \int_0^{\infty}\frac{w^2}{(1+w^2)^2}\ dw
$$

1.10 Problema 10.

Si $f(x)$**es una función par ,con integral de Fourier** $f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty A(w)\cos(wx)dw$**,**

demuestre que: a) $xf(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty A^*(w)\cos(wx)dw,$ donde $A^*(w) = -\frac{dA(w)}{dw}$

b) $x^2 f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty A^*(w)\cos(wx)dw,$ donde $A^*(w) = -\frac{d^2A(w)}{dw^2}$

Solución

a) Se tiene que $xf(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty A^*(w)\, sen(wx)dw,$ es una función impar,

entonces $A^*(w) = 2\int\limits_0^\infty v\ f(v)\, sen(wv)dv\ (1).$

Como $f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty A(w)\cos(wx)dw$ con $A(w) = 2\int\limits_0^\infty f(v)\cos(wv)dv.$

Entonces, derivando el coeficiente queda $\frac{dA(w)}{dw} = -2\int\limits_0^\infty vf(v)\, sen(wv)dv\ (2)$

Por lo tanto, comparando (1) y (2) se tiene $\frac{dA(w)}{dw} = -A^*(w)$

b) Como $x^2 f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty A^*(w)\cos(wx)dw,$ es una función par,

entonces $A^*(w) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty v^2\ f(v)\cos(wv)dv\ (1)$

Como, $f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty A(w)\cos(wx)dw$ con $A(w) = 2\int\limits_0^\infty f(v)\cos(wv)dv.$

Por consiguiente $\frac{dA(w)}{dw} = -2\int\limits_0^\infty vf(v)\, sen(wv)dv \implies$

$\frac{d^2A(w)}{dw^2} = -2\int\limits_0^\infty v^2\ f(v)\cos(wv)dv\ (2)$

Por lo tanto, comparando (1) y (2)se tiene $\frac{d^2A(w)}{dw^2} = -A^*(w)\,.$