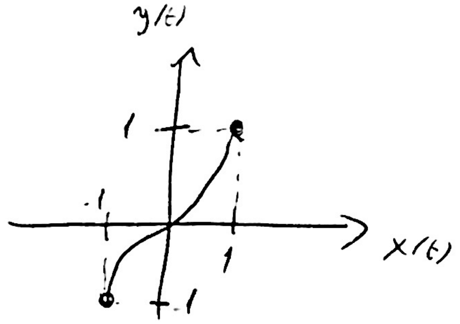
P1 $\Gamma(t) = (\sqrt[3]{t}, t)$, $t \in [-1, 1]$

$\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ Notar $x(t)^3 = y(t)$

Por lo que el gráfico es parte de una cúbica

Como $t \in [-1, 1] \Rightarrow y(t) \in [-1, 1] \Rightarrow x(t) \in [-1, 1]$



b) $\frac{d\Gamma}{dt} = (\cancel{3} t^{-\frac{2}{3}}, 1)$, como $\cancel{3} t^{-\frac{2}{3}}$ no es continua en $0 = t$

$\Rightarrow \Gamma(t)$ no es C^1 $\Rightarrow$ No es suave

Simple, Si $\Gamma(t_1) = \Gamma(t_2) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{t_1}, t_1) = (\sqrt[3]{t_2}, t_2)$

$\Rightarrow t_1 = t_2 \Rightarrow$ inyectiva

Regular, $\left\|\frac{d\Gamma}{dt}\right\| = \sqrt{t^{-\frac{6}{3}} + 1} > 1 > 0$

c) Para ser suave encontrar una parametrización C^1

Ej: (t, t^3) con $t \in [-1, 1]$

$\left(\frac{t}{2}, \frac{t^3}{8}\right)$ con $t \in [-2, 2]$

$\Big\}$ y más ideas

P2 $r(t) = \left(a\cos(t), a\sin(t), \frac{ht}{2\pi}\right)$, $t \in [0, 2\pi]$

a) $\frac{dr}{dt} = \left(-a\sin(t), a\cos(t), \frac{h}{2\pi}\right)$ todas son C^1 $\Rightarrow$ Suave

$\left\|\frac{dr}{dt}\right\| = \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} > 0 \Rightarrow$ Regular

$r(t_1) = r(t_2) \Rightarrow \frac{ht_1}{2\pi} = \frac{ht_2}{2\pi} \Rightarrow t_1 = t_2 \Rightarrow$ Simple

b) $s(t) = \int_0^t \left\|\frac{dr(\tilde{t})}{d\tilde{t}}\right\| d\tilde{t} = \int_0^t \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\, d\tilde{t} = \boxed{\sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\, t}$

P3 $\frac{dr}{dt} = \left(2t\cos(t) - t^2\sin(t), 2t\sin(t) + t^2\cos(t), \sqrt{3}t^2\right)$ es suave son C^1

$\left\|\frac{dr}{dt}\right\| = \sqrt{4t^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + t^4(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + 3t^4}$

$= 2|t|\sqrt{1 + t^2} \Leftarrow t \neq 0$

Sea mayor que 0, por lo tanto No es regular para $t \in [0, \infty)$

Nota: * Para $t > 0$ si lo es

$r(t_1) = r(t_2) \Rightarrow \frac{t_1^3}{\sqrt{3}} = \frac{t_2^3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{t_1 = t_2} \Rightarrow$ Simple

Propuesto: $r(t) = \left(t^2\cos(t), t^2\sin(t)\right)$, $t \in [0, \infty)$

$\tilde{r}(t_1) = \tilde{r}(t_2) \Rightarrow (t_1^2 \cos(t_1), t_1^2 \sin(t_1)) = (t_2^2 \cos(t_2), t_2^2 \sin(t_2))$

$t_1^2 \cos(t_1) = t_2^2 \cos(t_2) \to t_1^4 \cos^2(t_1) = t_2^4 \cos^2(t_2)$

$t_1^2 \sin(t_1) = t_2^2 \sin(t_2) \to t_1^4 \sin^2(t_1) = t_2^4 \sin^2(t_2)$

$t_1^4 = t_2^4 \to |t_1| = |t_2|$

$\Rightarrow t_1 = t_2$ o $t_1 = -t_2$

Si $\underline{t_1 = -t_2}$, $t_1^2 \sin(t_1) = t_2^2 \sin(t_2)$

$\Rightarrow t_1^2 \sin(t_1) = t_1^2 \sin(-t_1) = -t_1^2 \sin(t_1)$

Solo si $t_1 = 0$, para cualquier $t_1 \neq 0$

$\Rightarrow \boxed{t_1 = t_2}$ Por lo que es simple

$$S(t) = \int_0^t 2\tilde{t}\sqrt{1+\tilde{t}^2}\, d\tilde{t} \overset{u = 1+\tilde{t}^2}{=} \int_1^{1+t^2} \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{1+t^2} = \frac{2}{3}\left((1+t^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

Parte en $t=0$, pues $r(t^*) = (0,0,0) \Rightarrow \frac{t^{*3}}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow t^* = 0$

Encontrar $\bar{t}$ tal que $S(\bar{t}) = \frac{14}{3} \Rightarrow \left((1+\bar{t}^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = 7$

$\Rightarrow \bar{t} = \sqrt{3}$

Distancia a OXY es componente z de $r(\sqrt{3}) \Rightarrow \boxed{3}$

P4 $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ tq $f(0)=0$ $S(x)=e^{x}-f(x)-1$

Con ~~$r(x)=(x, f(x))$~~ $r(t)=(t, f(t))$, $t\in[0,x]$

$$\frac{dr}{dt}=(1, f'(t)) \Rightarrow \left\|\frac{dr}{dt}\right\|=\sqrt{1+f'(t)^2}$$

$$S(x)=\int_0^x \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt \overset{TFC}{\Rightarrow} e^{x}-f'(x)=\sqrt{1+f'(x)^2}$$

$$\Rightarrow (e^{x}-f'(x))^2=1+f'(x)^2 \Rightarrow e^{x}-2e^{x}f'(x)=1$$

$$\Rightarrow \frac{e^{x}-1}{2e^{x}}=f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$\rightarrow f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}e^{-x}+C, \text{ Como } f(0)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}+C=0 \Rightarrow \boxed{C=-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{f(x)=\frac{x+e^{-x}-1}{2}}$$