MA1002-1 Cálculo Diferencial e Integral
Auxiliar: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Resolución Guía Primitivas

22 de Septiembre de 2017

Primitivas con Cambio de Variable

Ejercicios Propuestos:

Nota: Como saber que cambio hacer??
Principalmente ver como transformar mediante el cambio de variable a una primitva conocida.
También para facilitar al momento de despejar algunas funciones, por ejemplo: $\int \cos(x-1)dx$ el cambio $u = x-1 \Rightarrow du = dx$, con este cambio nos quedara una primitiva conocida: $\int \cos(u)du = \sin(u) = \sin(x-1)+C$

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln(x)^2}}dx$

Hacer cambio $u = \ln(x)$, $du = \dfrac{dx}{x}$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln(x)^2}}dx = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(u) = \arcsin(\ln(x)) + C$$

2. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}dx$

Hacer cambio $u = e^x$, $du = e^x dx$

$$\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{u^2du}{1+u^2} = \int 1 - \frac{1}{u^2+1}du = u - \arctan(u) = e^x - \arctan(e^x) + C$$

3. $\displaystyle\int (x-1)\sqrt{x+4}dx$

Hacer el cambio $u = x+4$, $du = dx$

$$\int (x-1)\sqrt{x+4}dx = \int (u-5)\sqrt{u}du = \int u^{\frac{3}{2}} - 5u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{10u^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2(x+4)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{10(x+4)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

4. $\displaystyle\int \cos(x)^5 \sin(x)dx$

Hacer cambio $u = \cos(x)$, $du = -\sin(x)dx$

$$\int \cos(x)^5 \sin(x)dx = -\int u^5 du = -\frac{u^6}{6} = -\frac{\cos(x)^6}{6} + C$$

Primitivas con Trucos Típicos

Caso Logaritmo:

Ejercicios Propuestos:

$$\int \frac{e^x x^5}{e^x x^6 + 2017e^x} dx$$

El primer paso es simplemente simplificar los e^x, pues $e^x > 0$

$$\int \frac{e^x x^5}{e^x x^6 + 2017e^x} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x^5}{x^6 + 2017} dx = \frac{\int (\ln(x^6 + 2017))'}{6} dx = \frac{\ln(x^6 + 2017)}{6} + C$$

$$\int \frac{dx}{\arctan(x)(x^2 + 1)}$$

$$\int \frac{dx}{\arctan(x)(x^2 + 1)} = \int \frac{\frac{1}{x^2 + 1} dx}{\arctan(x)} = \ln(|\arctan(x)|) + C$$

Caso $a^2 + x^2$:

Ejercicios Propuestos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$$

Usando el cambio $a \sinh(u) = x$, $a \cosh(u) du = dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \int \frac{a \cosh(u) du}{\sqrt{a^2 \cosh^2(u)}} = \int \frac{a}{|a|} du = \frac{a}{|a|} u = \frac{a}{|a|} \text{argsinh}(\tfrac{x}{a}) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2 + x^2 + 2x}} dx$$

Primero se necesita completar el cuadrado dentro de la raiz

$$\int \frac{1}{\sqrt{2 + x^2 + 2x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 + (x + 1)^2}} dx$$

Hacer el cambio $\sinh(u) = (x + 1)$, $\cosh(u) du = dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2 + x^2 + 2x}} dx = \int \frac{\cosh(u) du}{\cosh(u)} = u = \text{argsinh}(x + 1) + C$$

Nota: El cosh siempre es positivo.

Caso $a^2 - x^2$:

Ejercicios Propuestos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

Hacer el cambio $a\sin(u) = x$, $a\cos(u)du = dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{a\cos(u)du}{\sqrt{a^2\cos^2(u)}} = \int \frac{a\cos(u)du}{|a|\cos(u)} = \frac{a}{|a|}u = \frac{a}{|a|}\arcsin(\frac{x}{a}) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} dx$$

Primero completar el cuadrado dentro de la raiz

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x-2)^2}}$$

Hacer el cambio $2\sin(u) = (x - 2)$, $2\cos(u)du = dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} dx = \int \frac{2\cos(u)du}{\sqrt{4\cos^2(u)}} = \int \frac{2\cos(u)du}{2\cos(u)} = u = \arcsin(\frac{x-2}{2}) + C$$

Nota: El coseno es positivo en los intervalos en que estan definidas estas primitivas.

Caso $x^2 - a^2$:

Ejercicios Propuestos:

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$$

Se presentaran dos formas de resolverla, la primera mediante el caso, pero tiene el problema que solo es valida para $|x| > |a|$.

Hacer el cambio $a\sec(u) = x$, $a\sec(u)\tan(u)du = dx$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \int \frac{a\sec(u)\tan(u)du}{a^2\tan^2(u)} = \int \frac{\sec(u)du}{a\tan(u)} = \int \frac{\operatorname{cosec}(u)du}{a} = -\frac{\ln(|\operatorname{cosec}(u) + \cot(u)|)}{a}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = -\frac{\ln(\sqrt{\frac{x^2}{x^2-a^2}}|(1 + \frac{a}{x})|)}{a} + C$$

La segunda forma sirve para cualquier $|x| \neq |a|$ y es mediante fracciones parciales:

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} dx = \frac{1}{2a} \ln(\frac{|x-a|}{|x+a|}) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}} dx$$

Primero es necesario completar el cuadrado dentro de la raiz

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2 - 4}} dx$$

Hacer el cambio $2\sec(u) = x + 2$, $2\sec(u)\tan(u)du = dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}} dx = \int \frac{2\sec(u)\tan(u)du}{\sqrt{4\tan^2(u)}} = \int \sec(u)du = \ln(|\sec(u) + \tan(u)|)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}} dx = \ln(|\frac{x+2}{2} + \sqrt{\frac{x^2 + 4x}{2}}|) + C$$

Observación: Como en muchas pautas de ejercicios similares verán que el módulo esta omitido para simplificar los cálculos (solo se le agregaria un menos que se puede sacar y los calculos serian los mismos), pues como son primitivas y no integrales definidas (las verán antes del C2) no se es tan riguroso, pues no se tiene claridad de en que intervalo se esta trabajando. En controles de años pasados pueden verificar que se asume positivo para simplificarlos y no tener problemas en el cálculo de la primitiva que es la intención del ejercicio.

Caso $\sin(ax)^{2k+1} \vee \cos(ax)^{2k+1}$**:**

Ejercicios Propuestos:

$$\int \sin(3x)^3 dx$$

Hacer el cambio $\sin^3(3x) = (1-\cos^2(3x))\sin(3x)$

$$\int \sin(3x)^3 dx = \int \sin(3x) - \cos^2(3x)\sin(3x)dx = -\frac{\cos(3x)}{3} + \frac{\cos^3(3x)}{9} + C$$

$$\int \cos(2x)^7 dx$$

Hacer el cambio $\cos^7(2x) = (1-\sin^2(2x))^3\cos(2x) = (1-3\sin^2(2x)+3\sin^4(2x)-\sin^6(2x))\cos(2x)$

$$\int \cos(2x)^7 dx = \int \cos(2x) - 3\sin^2(2x)\cos(2x) + 3\sin^4(2x)\cos(2x) - \sin^6(2x)\cos(2x)dx$$

$$\int \cos(2x)^7 dx = \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin^3(2x)}{2} + \frac{3\sin^5(2x)}{10} - \frac{\sin^7(2x)}{14} + C$$

Observación: Si en el cálculo de la ultima primitiva no se ve de manera directa, recurrir al cambio $u = \sin(2x)$

Caso $\sin(ax)^{2k} \vee \cos(ax)^{2k}$:

Ejercicios Propuestos:

$$\int \cos(4x)^6 dx$$

Haciendo el cambio: $\cos^2(4x) = \dfrac{1+\cos(8x)}{2} \Rightarrow \cos^6(4x) = \dfrac{(1+\cos(8x))^3}{8}$

$$\int \cos(4x)^6 dx = \frac{1}{8}\int 1 + 3\cos(8x) + 3\cos^2(8x) + \cos^3(8x)dx = \frac{1}{8}\int 1 + 3\cos(8x) + \frac{3}{2} + \frac{3\cos(16x)}{2} + \cos^3(8x)dx$$

$$\int \cos(4x)^6 dx = \frac{1}{8}\int \frac{5}{2} + 3\cos(8x) + \frac{3\cos(16x)}{2} + \cos^3(8x)dx, \text{ con } \cos^3(8x) = (1-\sin^2(8x))\cos(8x)$$

$$\int \cos(4x)^6 dx = \frac{1}{8}\int \frac{5}{2} + 4\cos(8x) + \frac{3\cos(16x)}{2} - \sin^2(8x)\cos(8x)dx$$

$$\int \cos(4x)^6 dx = \frac{1}{8}(\frac{5x}{2} + \frac{\sin(8x)}{2} + \frac{3\sin(16x)}{32} - \frac{\sin^3(8x)}{24}) + C$$

$$\int \sin(3x)^2 dx$$

Haciendo el cambio $\sin^2(3x) = \dfrac{1-\cos(6x)}{2}$

$$\int \sin(3x)^2 dx = \frac{1}{2}\int 1 - \cos(6x)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(6x)}{12} + C$$

Primitivas de Fracciones Racionales

Ejercicio Propuesto:

$$\int \frac{4}{(x+1)(x-1)}dx$$

Haciendo fracciones parciales se tiene que:

$$\frac{4}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{4}{(x+1)(x-1)}dx = \int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}dx = 2\ln(\frac{|x-1|}{|x+1|}) + C = \ln(\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2) + C$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+2x+2}dx$$

Lo primero es notar que no se pueden hacer fracciones parciales, por lo tanto se hara un pequeño ni quita ni pone:

$$\int \frac{x^2}{x^2+2x+2}dx = \int 1 - \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx = x - \ln(x^2+2x+2) + C$$

Caso $R(\sin(x), \cos(x))$:

Ejercicios Propuestos:

$$\int \frac{1}{\sin(x)}dx$$

Usando el cambio $t = \tan(\frac{x}{2})$, $\dfrac{2dt}{1+t^2} = dx$

Calculando se obtiene que: $\sin(x) = \dfrac{2t}{t^2+1}$

$$\int \frac{1}{\sin(x)}dx = \int \frac{2dt}{1+t^2}\frac{t^2+1}{2t} = \int \frac{dt}{t} = \ln(|t|) = \ln(|\tan(\frac{x}{2})|) + C$$

$$\int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx$$

Usar cambio $t = \tan(\frac{x}{2})$, $\dfrac{2dt}{1+t^2} = dx$

Calculando se obtiene que: $\sin(x) = \dfrac{2t}{t^2+1}$ y $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{(1-2t-t^2)2dt}{(1+2t-t^2)(1+t^2)}$$

Usando fracciones parciales se tiene que:

$$\frac{(1-2t-t^2)}{(1+2t-t^2)(1+t^2)} = \frac{1-t}{1+2t-t^2} - \frac{t}{1+t^2}$$

$$\int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx = \int \frac{2-2t}{(1+2t-t^2)} - \frac{2t}{(1+t^2)}dt = \ln(\frac{|1+2t-t^2|}{1+t^2})$$

$$\int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx = \ln(\frac{|1+2\tan(\frac{x}{2})-\tan^2(\frac{x}{2})|}{1+(\tan^2(\frac{x}{2}))}) = \ln(\frac{|1+2\tan(\frac{x}{2})-\tan^2(\frac{x}{2})|}{\sec^2(\frac{x}{2})}) + C$$

Primitivas por Partes

Ejercicios Propuestos:

$\int f^{-1}(x)dx$, conociendo $\int f(u)du = F(u)$

Primero se usara el cambio $f(t) = x$, $f'(t)dt = dx$

$$\int f^{-1}(x)dx = \int tf'(t)dt$$

Escogiendo $u = t$ y $dv = f'(t)dt$, se tiene que:

$$\int f^{-1}(x)dx = tf(t) - \int f(t)dt = tf(t) - F(t) = f^{-1}(x)x - F(f^{-1}(x)) + C$$

$\int x\ln(|\frac{x-1}{x+1}|)dx$

Se haran dos casos para no trabajar con el módulo primero caso $x < -1 \vee 1 < x$

Escogiendo $\ln(\frac{x-1}{x+1}) = u$ y $dv = xdx$, se tiene que:

$$\int x\ln(\frac{x-1}{x+1})dx = \ln(\frac{x-1}{x+1})\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{x+1}{x-1}\frac{2}{(x+1)^2}dx = \ln(\frac{x-1}{x+1})\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}dx$$

$$\int x\ln(\frac{x-1}{x+1})dx = \ln(\frac{x-1}{x+1})\frac{x^2}{2} - \int 1 + \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx = \ln(\frac{|x-1|}{|x+1|})\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\ln(\frac{|x-1|}{|x+1|}) + C$$

En los últimos pasos se uso un ni quita ni pone para bajar el grado del numerador en la fracción, los módulos (de manera innecesaria, pues lo de adentro del logaritmo es positivo por el caso) y la última integral se calculo de manera directa apoyándose en el ejercicio propuesto de la pagina 4.

Caso $x \in (-1, 1)$

Escogiendo $\ln(\frac{-(x-1)}{x+1}) = u$ y $dv = xdx$, se tiene que:

$$\int x\ln(\frac{-(x-1)}{x+1})dx = \ln(\frac{-(x-1)}{x+1})\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{x+1}{-(x-1)}\frac{-2}{(x+1)^2}dx = \ln(\frac{-(x-1)}{x+1})\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}dx$$

$$\int x\ln(\frac{-(x-1)}{x+1})dx = \ln(\frac{-(x-1)}{x+1})\frac{x^2}{2} - \int 1 + \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx = \ln(\frac{|x-1|}{|x+1|})\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\ln(\frac{|x-1|}{|x+1|}) + C$$

La última linea presenta un desarrollo similar al caso anterior, juntando los dos casos se tiene que la solución es:

$$\int x\ln(|\frac{x-1}{x+1}|)dx = \ln(\frac{|x-1|}{|x+1|})\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\ln(\frac{|x-1|}{|x+1|}) + C$$

Ejercicios Propuestos:

1. $\int x^2 e^{-x} dx$

Indicacion: Hacer 2 veces por partes

$$\int x^2 e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2 + 2(x+1)) + C$$

2. $\int \frac{g(x)g'(x)}{\sqrt{1+g(x)^2}} dx$

Indicacion: Hacer cambio de variable

$$\int \frac{g(x)g'(x)}{\sqrt{1+g(x)^2}} dx = \sqrt{1+g(x)^2} + C$$

3. $\int \operatorname{arc\,sen}(x) dx$

Indicacion: Hacer por partes

$$\int \operatorname{arc\,sen}(x) dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

4. $\int \sin(x)^{24} \cos(x) \cos(a) dx$

Indicacion: Hacer cambio de variable

$$\int \sin(x)^{24} \cos(x) \cos(a) dx = \frac{\sin^{25}(x)}{25} \cos(a) + C$$

5. $\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} dx$

Indicacion: Revisar el caso correspondiente

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} dx = \ln(1+\sin(x)) + C$$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{1x+3-x^2}} dx$

Indicacion: Completar el cuadrado y revisar el caso correspondiente

$$\int \frac{1}{\sqrt{1x+3-x^2}} dx = \arcsin(\frac{2}{\sqrt{13}}(x-\frac{1}{2})) + C$$

7. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}dx$

Indicacion: Hacer un cambio de variable, completar el cuadrado y revisar el caso correspondiente

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(e^x+\frac{1}{2}))+C$$

8. $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)}dx$

Indicacion: Hacer fracciones parciales y calcular cada primitiva

$$\int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)}dx = \frac{ln(x^2+1)}{4}+\frac{\arctan(x)}{2}-\frac{\ln(|x+1|)}{2}+C$$

9. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx$, hacer de una forma diferente a la del caso anterior.

Indicacion: Revisar el caso correspondiente

$$\int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx = \ln(|\sin(x)+\cos(x)|)+C$$

10. $\displaystyle\int \frac{x^2\operatorname{arc\,tg}(x)}{1+x^2}dx$

Indicacion: Hacer un ni quita ni pone para hacer dos primitivas de diferentes casos

$$\int \frac{x^2\operatorname{arc\,tg}(x)}{1+x^2}dx = x\arctan(x)-\frac{\ln(x^2+1)}{2}-\frac{\arctan^2(x)}{2}+C$$

11. $\displaystyle\int \ln(1+x^2)dx$

Indicacion: Por partes

$$\int \ln(1+x^2)dx = x\ln(x^2+1)-2x+2\arctan(x)+C$$

12. $\displaystyle\int \frac{\pi x}{\sqrt{x^2+2017}}dx$

Indicacion: Hacer cambio de variable

$$\int \frac{\pi x}{\sqrt{x^2+2017}}dx = \pi\sqrt{x^2+2017}+C$$

13. $\int e^{ax}\sin(bx)dx$

Indicacion: Hacer dos veces por partes

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C$$

14. $\int x^2\ln(x)dx$

Indicacion: Hacer por partes

$$\int x^2\ln(x)dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$$