MA2002-7 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

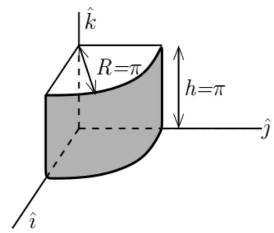
Auxiliar 9: Repaso C1

5 de octubre de 2022

P1. Use apropiadamente el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo vectorial:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^z \sin(y) + xy^2 z \\ e^x \cos(z) + x^2 yz \\ x^2 e^y \end{pmatrix}$$

sobre el manto del cuarto de cilindro de radio y altura π de la figura , orientado hacia el exterior.



P2. Considere el siguiente campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 y - 3z + e^x \sin(z))\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + (e^x \cos(z) - 3x)\hat{k}$$

a) Calcule $\mathrm{rot}(\vec{F})$.

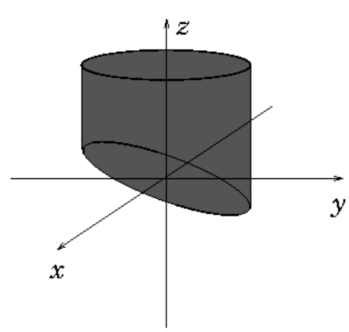
b) Considere la curva Γ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), \cos(t)) \qquad t \in [0, 2\pi],$$

y calcule

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Indicación: Note que Γ es el borde inferior de la porción del cilindro de la siguiente figura:



P3. [**Gauss al límite**]

De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un protón y un neutrón y tienen como potencial a $U(r) = K\dfrac{e^{-\alpha r}}{r}$ en coordenadas esféricas, para cierta constante $K < 0$ y $\alpha > 0$.

a) Encuentre la fuerza $F = -\nabla U$, en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$.

b) Calcule directamente el flujo a través de un casquete esférico de radio a ($a > 0$), orientado según la normal exterior.

c) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$, en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$.

d) [**Propuesto**] Demuestre que si Ω es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y orientada según la normal exterior entonces:

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot d\vec{S} = 4\pi K - \alpha^2 \iiint_{\Omega} U dV$$

Resumen

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$$

$$div(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial(F_u h_v h_w)}{\partial u} + \frac{\partial(F_v h_u h_w)}{\partial v} + \frac{\partial(F_w h_u h_v)}{\partial w}\right)$$

$$\vec{r}ot(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

Teorema de Gauss o de la Divergencia

$$\iiint_{\Omega} div(\vec{F})dV = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Teorema del rotor de Stokes

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S} rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA$$