MA2002-7 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.**u**chile.cl

Auxiliar 12: Transformada de Fourier y EDPs II

9 de noviembre de 2022

P1. Resuelva la ecuación de Schrödinger con condición inicial:

$$iu_t(t,x) + u_{xx}(t,x) = 0$$
$$u(0,x) = f(x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Donde las funciones $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ son integrables en la variable x.

P2. Las vibraciones de una varilla semi-infinita se modelan por la ecuación:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0 \qquad\qquad x > 0, t > 0$$

Suponga que la varilla satisface una condición de Neumann en el origen $u_x(t,0) = 0 \forall t > 9$; que $\int_0^\infty |u(t,x)|dx < \infty$; y que inicialmente se encuentra en reposo $u_t(0,x) = 0$ en la posición $u(0,x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ para $x > 0$.

Indicación: La transformada de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es $\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}$.

a) Considere $v(t,\cdot)$ la extensión par de la función $u(t,\cdot)$. Verifique que esta extensión satisface el problema para $x \in R$ y $t > 0$.

b) Deduzca que la transformada de $v(t,\cdot)$ es $\hat{v}(t,s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|} \cos(as^2 t)$

c) Concluya que la solución $u(t,x)$, se puede escribir como:

$$u(t,x) = \int_0^\infty e^{-s} \cos(sx) \cos(as^2 t) ds$$