MA4006. Combinatoria. 2022.
Profesor: José Soto.

Tarea 3.

Fecha normal de entrega: Lunes 14 de noviembre, 23:59.
Se puede solicitar una prórroga por correo para extender el plazo una semana. Se permite una prórroga al semestre, úsela bien.
Debe entregarse en PDF (si escanea o fotografía sus soluciones, asegúrese de que sea legible).
Cíñase a la política de honestidad y colaboración del curso (Léala en el archivo admin.pdf en ucursos).
Esta tarea tiene 7 ejercicios cada uno vale 12 puntos. Los ejercicios 1 y 2 son de caracter individual. En los 5 ejercicios restantes se puede y se sugiere colaborar (si colabora con alguien en un problema específico debe indicarlo, **dándole crédito** a la o las otras personas con las que discutió. Si no colabora con nadie en un problema, escriba la frase sin colaboración.)
Solo se revisarán partes completas de ejercicios (si no logró hacer alguna parte, no entregue dicha parte pues no será revisada).

Por favor escriba de manera concisa. No entregue más de 3 planas por ejercicio.

El puntaje de esta tarea se calcula como sigue.

$$(\texttt{puntaje ejercicios 1 y 2}) + \text{mín}(36, \texttt{puntaje ejercicios 3 a 7}).$$

para un máximo de 60 puntos (que equivale a un 7.0).

Ejercicio 1. Individual.

(a) (4 puntos) Pruebe que el número de soluciones $x \in \mathbb{N}^3$ que satisfacen

$$x_1 + x_2 + x_3 = n, \quad x_2 \text{ par}, \ x_3 \text{ no divisible por } 3$$

es igual al número de soluciones $x \in \mathbb{N}^3$ que satisfacen

$$x_1 + x_2 + x_3 = n, \quad x_1 \geq 1, \ x_3 \text{ divisible por } 3.$$

(b) (2 puntos cada uno) Para $k \geq 1$ fijo: **usando el método simbólico** encuentre la FGO de la secuencia pedida:

(I) (a_n): Número de composiciones de n con partes en $[k]$.

(II) (b_n): El número de particiones de n con partes en $[k]$.

(III) (c_n): El número de formas de escribir n con sumandos en $[k]$, donde cada sumando $j \in [k]$ se puede colorear de j colores. Por ejemplo: si $k = 3$, podemos escribir $n = 3$ de 8 formas como sigue donde los subíndices representan el color $(1_1, 1_1, 1_1), (2_1, 1_1), (2_2, 1_1), (1_1, 2_1), (1_1, 2_2), (3_1), (3_2), (3_3)$

(IV) (d_n) : El número de formas de componer n con sumandos en $[k]$, donde el j-ésimo sumando de la suma (si existe) se puede colorear con j colores. Por ejemplo: si $k = 3$, podemos escribir $n = 3$ de 10 formas como sigue donde los subíndices representan el color $(1_1, 1_1, 1_1), (1_1, 1_1, 1_2), (1_1, 1_1, 1_3), (1_1, 1_2, 1_1)$, $(1_1, 1_2, 1_2)$, $(1_1, 1_2, 1_3)$, $(2_1, 1_1)$, $(2_1, 1_2)$, $(1_1, 2_1)$, $(1_1, 2_2)$, (3_1).

Ejercicio 2. Individual. El **problema de los billetes de Sylvester** consiste en estudiar las cantidades que no pueden “pagarse” con billetes de p pesos y billetes de q pesos, donde p y q son coprimos. Sea $A(p,q)$ el conjunto de combinaciones lineales de p y q con coeficientes naturales, es decir, las cantidades que si se pueden pagar con p y q:

$$A(p,q) = \{ip + jq \colon i, j \in \mathbb{N}\}$$

Como p y q no tienen divisores en común se puede probar (no lo haga) que $A(p,q)$ se particiona en los conjuntos $(A_i(p,q))_{i=0}^{q-1}$, con

$$A_i(p,q) = \{ip + jq \colon j \in \mathbb{N}\}, \qquad \forall 0 \le i \le q-1.$$

(a) (4 puntos) Sea f la secuencia indicatriz de $A(p,q)$, es decir $f_n = [\![n \in A(p,q)]\!]$. Usando la partición propuesta pruebe que la FGO de f es

$$F(x) = \frac{1 - x^{pq}}{(1-x^p)(1-x^q)}.$$

(b) (4 puntos) Sea $G(x) = 1/(1-x)$ la FGO de la secuencia indicatriz de todos los naturales. La serie $H(x) = G(x) - F(x)$ es entonces igual a la FGO de la secuencia indicatriz de los valores que NO se pueden pagar con billetes de p y q unidades. Suponiendo que esta cantidad es finita, es decir, que $H(x)$ es un polinomio, pruebe que el valor más grande fuera de $A(p,q)$ es $pq - p - q$.

(c) (4 puntos) Usando que $H(x)$ es un polinomio a coeficientes 0 y 1, encuentre explícitamente la cantidad de números naturales que no pertenecen a $A(p,q)$.
Indicación: Evalúe H en un punto x adecuado.

Ejercicio 3. Sea a_n el número de cubrir un tablero de $2 \times n$ casilleros con dominós verticales, horizontales o cuadrados de 2×2.

(a) (1 punto) Encuentre directamente una recurrencia lineal para a_n.

(b) (2 puntos) Resuelva la recurrencia y encuentre una forma cerrada para a_n (puede revisar su respuesta considerando que $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 3, 5)$).

(c) (3 puntos) Encuentre directamente la FGO de a usando el método simbólico. Para esto puede ser conveniente pensar que cada tablero está dividido en <u>fichas fundamentales</u>, es decir, tableros de alto igual al tablero original (en este caso 2) que no contiene a otro subtablero del mismo alto. En este caso las 3 fichas a considerar son: un dominó vertical, un cuadrado de 2×2 y una ficha especial que tiene dos dominós horizontales pegados uno sobre el otro.

(d) (6 puntos)

Sea ahora b_n el número de cubrir un tablero de $3 \times n$ casilleros con dominós verticales y horizontales. Usando ideas similares al ejercicio anterior, aplique el método simbólico para encontrar la FGO de b y también la recurrencia lineal que satisfacen sus términos. Compruebe su respuesta revisando si los valores iniciales son correctos. **Indicación:** Argumente que en toda ficha fundamental la fila superior o la fila inferior (¡o ambas!) está formada solo por dominós horizontales. Luego, ¿Cuántas fichas fundamentales hay de ancho k?

Ejercicio 4. Recordemos que los números de fibonacci f_n cuentan el número de composiciones de $(n-1)$ con partes en $\{1,2\}$. Equivalentemente, f_n cuenta el número de formas de componer n con una parte de tamaño 1 y luego una secuencia de partes de tamaño uno o dos. Es decir, la FGO de f es

$$F(x) = \mathrm{FGO}(\{1\} \cdot \mathrm{SEQ}(\{1,2\}) = x \cdot \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Demuestre, mostrando que las FGO asociadas son equivalentes, que el número de fibonacci f_n cuenta:

(a) (1 punto) El número de composiciones de n en partes de tamaño impar.

(b) (1 punto) El número de dividir un tablero de $1 \times n$ en una ficha inicial que puede ser un monominó rojo o un dominó rojo, seguido de una secuencia de fichas a elegir entre dominós azules, dominós rojos, o piezas de largo 3.

(c) (2 puntos) El número de composiciones de $n+1$ en partes de tamaño 2 o más.

Para las partes siguientes necesitamos una propiedad adicional

(d) (4 puntos) Pruebe que si $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ es la FGO de $(a_n)_n$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{A(x)}{1-x} &= \sum_{n\geq 0} x^n (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\
\frac{A(x)+A(-x)}{2} &= \sum_{n\geq 0, n \text{ par}} x^n a_n \\
\frac{A(x)-A(-x)}{2} &= \sum_{n\geq 0, n \text{impar}} x^n a_n .
\end{aligned}$$

Finalmente, considerando $\sqrt{x}$ como una variable auxiliar tal que $\sqrt{x}^2 = x$, determine cuanto vale $\frac{A(\sqrt{x})+A(-\sqrt{x})}{2}$ y $\sqrt{x}\frac{A(\sqrt{x})-A(-\sqrt{x})}{2}$

Use las partes anteriores para demostrar mediante FGO que:

(e) (2 puntos)

$$f_0 + f_2 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$$

(f) (2 puntos)

$$f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$$

Ejercicio 5.

(a) (3 puntos) Sea $\ell \geq 2$. Demuestre que el número de palabras en $\{0,1\}^n$ que no tiene a 0^ℓ como subpalabra es igual al número de composiciones de n con partes de tamaño mayor o igual que ℓ.

En lo que sigue, interpretamos las aristas de un camino creciente en el plano como palabras en $\{R, U\}^*$ donde R es un paso a la derecha y U un paso hacia arriba. Definimos los siguientes clases de caminos crecientes (las definiciones no dependen del punto de partida, pero es conveniente fijar coordenadas de modo que partan en $(0,0)$). Los pesos de R y U son 1 en todas las clases.

- Clase atómica derecha: $\mathcal{R} = \{R\}$. Clase atómica arriba $\mathcal{U} = \{U\}$.
- Caminos de Dyck: $\mathcal{D}$. Caminos que se mantiene débilmente bajo la diagonal, y terminan en la diagonal.
- Puentes: $\mathcal{B}$. Caminos que terminan en la diagonal.
- Meandros: $\mathcal{M}$. Caminos que se mantienen débilmente bajo la diagonal.

Notamos que si un camino de Dyck es no vacío entonces debe empezar con un paso derecha, luego debe mantenerse estrictamente bajo la diagonal y eventualmente debe tocar la diagonal con un paso arriba. En ese momento el camino vuelva estar en la diagonal y puede repetir el proceso. Es decir cada camino de Dyck es una secuencia de 0 o más caminos como el descrito antes. De aquí, se deduce la ecuación funcional como clases no etiquetadas:

$$\mathcal{D} = \mathrm{Seq}(\mathcal{R} \times \mathcal{D} \times \mathcal{U})$$

Que se traduce en $D(x) = \frac{1}{1-(x\cdot D(x)\cdot x)}$, o bien $-x^2 D(x)^2 + D(x) - 1 = 0$, y luego $D(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x^2} = C(x^2)$, donde $C(x)$ es la FGO de los números de Catalán. Se deduce, como es de esperarse, que hay $d_n = [n \text{ par}] C_{n/2}$ caminos de Dyck de largo n.

(b) (3 puntos) Explique e interprete combinatorialmente la factorización alternativa $\mathcal{D} = \mathcal{E} + \mathcal{R} \times \mathcal{D} \times \mathcal{U} \times \mathcal{D}$.

(c) (3 puntos) Escriba una ecuación para la clase de los puentes en función de la clase de caminos de Dyck (observe que cada vez que el camino cruza la diagonal, se tiene o bien un camino de Dyck o su reflejo). Deduzca su FGO $B(x)$ y <u>calcule explícitamente</u> b_n.

(d) (3 puntos) Escriba una ecuación para la clase de los meandros en función de la clase de caminos de Dyck (observe para cada k, la última vez que el camino visita la diagonal $y = x - k$, ¿qué debe venir después?). Deduzca su FGO $M(x)$ y calcule explícitamente m_n.

Ejercicio 6. (Dos puntos cada parte) Resuelva como extracción de coeficientes de funciones generatrices exponenciales. Cuente el número de palabras de largo n con letras A, B, C, D que satisfacen:

(a) Ninguna restricción.

(b) Aparece al menos 1 A en la palabra.

(c) Aparece al menos 1 elemento de $\{A, B\}$ en la palabra.

(d) Hay un número par de A y un número impar de C.

(e) Hay a lo más 5 A, al menos 6 B y un número par de C.

(f) La cantidad de A es impar, la cantidad de B es 1 módulo 3, la cantidad de C es 1 módulo 4 y la cantidad de D es 1 módulo 5.

Ejercicio 7. Sea $n \in \mathbb{N}$ y llame $s = n + 1$, $t = n + 2$. Un s-t **flujo perfecto** en el digrafo completo $\vec{K}_{n+2} = ([n + 2], [n + 2]^2)$ es un conjunto F de caminos dirigidos y ciclos dirigidos que satisfacen:

1. Cada camino en F empieza en s y termina en t, pasando por **al menos 1 nodo en** $[n]$ (i.e., el camino directo con un arco st no pertenece a f).
2. Cada ciclo en F no pasa por s ni por t (se permiten ciclos de un nodo, es decir loops).
3. Cada nodo en $[n] = [n + 2] \setminus \{s, t\}$ pertenece a **exactamente** 1 camino o ciclo.

Definimos q_n como el número de s-t flujos perfectos en $\vec{K}_{n+2}$.

(a) (3 puntos) Use el método simbólico sobre estructuras fuertemente etiquetadas para mostrar que la función generatriz exponencial asociada a q_n es

$$\hat{Q}(x) = \exp\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{1}{1-x}.$$

(b) (3 puntos) Deduzca usando la parte anterior que

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!}$$

Imagine ahora que está trabajando en el digrafo completo $\vec{K}_{n+1} = ([n+1], [n+1]^2)$ y que el nodo $n+1$ es un almacén. Una **ruta** es un ciclo que parte en $n + 1$, visita **uno o más nodos** y luego regresa al nodo $n + 1$. Un **esquema de ruteo** es una colección de rutas, donde cada nodo en $[n]$ pertenece a exactamente una ruta. Una **asignación de ruteo** es un esquema de ruteo donde cada ruta es asignado un camión (una etiqueta entre 1 y el número de rutas). Por ejemplo, si $n = 4$. Un posible esquema de ruteo con 2 rutas es tomar las dos rutas $(5, 1, 2, 4, 5); (5, 3, 5)$, en una asignación de ruteo además hay que decidir que ruta lleva el camión 1 y que ruta lleva el camión 2 (por lo que hay dos posibles asignaciones de ruteo para este esquema)

Definimos r_n como el número de esquemas de ruteos en $\vec{K}_{n+1}$ y s_n como el número de asignaciones de ruteos en $\vec{K}_{n+1}$.

(c) (2 puntos) Use el método simbólico sobre estructuras fuertemente etiquetadas para encontrar la función generatriz exponencial asociada a r_n y s_n.

(d) (4 puntos) Deduzca que

$$r_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}$$

$$s_n = [\![n \geq 1]\!] 2^{n-1} n! + [\![n = 0]\!]$$