Departamento de Ingeniería Matemática
MA4801-1 Análisis Funcional
Profesora: Salome Martínez
Primavera 2022

Guía 1

Auxiliares : Martín Berríos, Diego Céspedes, Felipe Espinosa

P1. Sea $\mathcal{P} = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de seminormas definidas en un espacio vectorial X y τ la topología generada por $\mathcal{P}$. Demuestre que (X, τ) es metrizable, con la métrica dada por

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}.$$

P2. Considere $C^\infty(\mathbb{R})$ dotado por la topología inducida por la familia de seminormas

$$p_{k,n}(f) = \sup_{x\in[-k,k]} |f^{(n)}(x)|, \quad \text{para } k \geq 1,\ n \geq 0.$$

Denotamos $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ a $C^\infty(\mathbb{R})$ dotado de la topología generada por esta familia, que del problema anterior es metrizable.

a) Demuestre que $f_n \to f$ cuando $n \to \infty$ si y solo si para todo K compacto en $\mathbb{R}$ y todo $k \geq 0$ se tiene que $\sup_{x\in K} |f_n^{(k)}(x) - f^k(x)| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

b) Sean f_n, f y g funciones continuas en $[-M, M]$. Demuestre que si $\sup_{x\in[-M,M]} |f_n - f| \to 0$ y $\sup_{x\in[-M,M]} |f_n' - g| \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces f es diferenciable y $g = f'$.

c) Demuestre que $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ es un espacio métrico completo. Ind.: Recuerde que $C(K)$ dotado de la norma del supremo es un espacio de Banach, es decir es completo. Use además la parte anterior.

d) Demuestre que si $E \subset \mathcal{E}(\mathbb{R})$ es cerrado y acotado, entonces E es compacto. Ind.: Use el teorema de Arzela-Ascoli y un argumento diagonal.

e) Demuestre que $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ no es normable.

P3. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión, $1 \leq p \leq \infty$ y

$$A = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x_n|^p \leq 1 \right\} \subseteq \ell^p$$

a) Demuestre que A es balanceado y convexo.

b) Demuestre que A es absorbente si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

c) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, calcule la seminorma de Minkowski dada por A.

P4. Sea X un espacio vectorial real y $P \subset X$ tal que si $x, y \in P$ y $\lambda \geq 0$ entonces $x + y \in P$ y $\lambda x \in P$ (P se denomina cono). P se puede usar para definir un orden en X. Diremos que $x \preceq y$ si $y - x \in P$, y que $f : X \to \mathbb{R}$ lineal es P-positiva si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in P$. Sea M un subespacio de X tal que para todo $x \in X$ existe $y \in M$ con $x \preceq y$. Pruebe que si $f : M \to \mathbb{R}$ lineal es $(P \cap M)$-positiva entonces existe una función lineal $F : X \to \mathbb{R}$ P-positiva tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in M$. Ind.: Le puede ser útil considerar el funcional $p(x) = \inf\{f(y) : y \in M,\ x \preceq y\}$, pruebe que es funcional de Minkowski.

P5. Sea el espacio vectorial $C[0,1]$, consideremos dos topologías, primero σ, dada por la métrica:

$$d(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}$$

Y la segunda τ_p dada por la topología de la convergencia puntual, dada por la familia de seminormas $(p_x)_{x\in[0,1]}$, donde $p_x(f) = |f(x)|$(Ver Aux 4).

a) Pruebe que la identidad $I : (C[0,1], \tau_p) \to (C[0,1], \sigma)$ es secuencialmente continua, mas no continua.

b) Deduzca que la topología de la convergencia puntual τ_p no es metrizable.

P6. Ejercicios 5, 6, 7, 8, 14 del capítulo 1 del Rudin; ejercicios 3 y 4 del Capítulo 3 del Rudin.

P7. Ejercicios 1.3, 1.4, 1.9 del texto de Análisis funcional de H. Brezis.