Departamento de Ingeniería Matemática
MA4801-1 Análisis Funcional
Profesora: Salome Martínez
Primavera 2022

Auxiliar 4:ELC

Auxiliares : Martín Berríos, Diego Céspedes, Felipe Espinosa

P1. [**Separación**] Sea V un abierto que contiene al 0 en un e.v.t. Demuestre que existe una función continua f a valores reales tal que $f(0) = 0$ y que $f(x) = 1$ fuera de V.
Hint: Sean V_n vecindades del 0, tal que $V_1 + V_1 \subseteq V$, y $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Construir una f como en un teorema anterior, mostrar que f es continua en 0 y que :

$$|f(x) - f(y)| \leq f(x - y)$$

[**Propuesto**]: Pruebe que con la función anterior se puede concluir el siguiente resultado. Sea D un cerrado de X y $c \notin D$, entonces existe una función continua a valores reales, tal que $f(c) = 0$ y $f = 1$ en D.

Una solución :
Basándose en la función definida en clases, agarrando una colección de balanceados que cumplan que $V_1 + V_1 \subseteq V$, y $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$:
Para D el conjunto de los racionales de la forma

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r) 2^{-n}$$

Donde $c_n(r)$ es 0 o 1 y es 1 para un numero finito de términos. Se define entonces $A(r) = X$ si $x \leq 1$, y si $r \in D$, se define

$$A(r) = c_1(r)V_1 + c_2(r)V_2 + c_3(r)V_3 + ...$$

luego la función:

$$f(x) = \inf\{r : x \in A(r)\}$$

Es tal que satisface $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$. Ahora demostraremos lo que se pide, para ver que es continua en 0 hay que ver los siguiente:
Continuidad en 0:
Como $f(0) = 0$ hay que ver que para cada vecindad de 0 U existe una vecindad V del 0(en X) tal que :

$$f(V) \subseteq U$$

Como cada abierto U contiene una bola, basta ver que $\forall \varepsilon > 0$, existe una vecindad V tal que $f(V) \subseteq B(0, \varepsilon)$.
Como se busca acotar un ínfimo por arriba según la definición de f, bastsa encontrar un termino que participe en la colección, los números "mas simples"de D son los de la forma 2^{-n}, notamos que $A(2^{-n}) = V_n$, luego tomamos un $\bar{n}$ tal que $2^{-\bar{n}} < \varepsilon$, asi que tomando $V = V_{\bar{n}}$, se cumple lo pedido
Desigualdad
Como $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$, se tiene entonces: $f(x) = f(x-y+y) \leq f(x-y)+f(y)$, se puede concluir que $f(x) - f(y) \leq f(x - y)$, análogamente se tiene la otra desigualdad.
Continuidad:
La desigualdad anterior relaciona las diferencias de las imágenes con la imagen de la diferencia asi que si xey estan cercas y la funcion es continua en 0 entonces sera continua en todas partes, formalizemos esto.

Sea $x \in X$ y V un abierto de $f(y)$ por el mismo comentario de arriba basta demostrar el caso en el que $V = B(f(x), \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$. Para ver que es continua hay que buscar una vecindad V de x tal que $f(V) \subseteq B(0, \varepsilon)$, para ello como toda vecindad de x se puede escribir como $x + N$ con N una vecindad del 0, como f es continua en 0 podemos tomar N tal que $f(N) \subseteq (B(0, \varepsilon)$, luego si $y \in x + N$, entonces $y - x \in N$, ahora sin perdidas de generalidad podemos decir que N es simétrico(si no es simétrico contiene una vecindad simétrica), luego $x - y \in N$ es decir $|f(x) - f(y)| \leq f(x - y) \subseteq B(0, \varepsilon)$.
Ver que pasa fuera de V:
Si $x \notin V$ para todo $r \in D$, $x \notin A(r)$ luego $f(x) = 1$.

P2. Sea $X = \{f | f : [0, 1] \to \mathbb{C}\}$, topologizado por la familia de seminormas.

$$p_x(f) = |f(x)| \;\; \forall x \;\; 0 \leq x \leq 1$$

Esta topología se llama *Topología de la convergencia puntual*:

a) Pruebe que es una familia separante de seminormas.

b) Justifique el nombre de la topología.

c) Sea $F \subseteq X$, entonces pruebe que:

$$\mathcal{F} \text{ es acotado} \iff \forall\ 0 \leq x \leq 1\ \ \exists c > 0\ \ |f(x)| < c\ \ \forall f \in \mathcal{F}$$

Una solución:

1) Ver que es una familia de semi normas es consecuencia de las propiedades del valor absoluto, para ver que es separante, sea $f \neq 0$ es decir no es la función idénticamente nula, luego existe un $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) \neq 0$, entonces $p_{\bar{x}}(f) = |f(\bar{x})| \neq 0$

2) Lo que se busca justificar es que esta topología le hace honor a su nombre, es decir cumple que
$$f_n \to f \iff \forall x \in [0,1]\ \ f_n(x) \to f(x)$$

Para ver esto veamos primero $\Longleftarrow$:
Sea V una vecindad de f, corresponde a una traslación de una vecindad del origen luego $V = N + f$ con N una vecindad del origen, al estar la topología de X generada por una familia de seminormas separantes, existe entonces un $n \in \mathbb{N}$, tal que $\bigcap_{i=1}^{n}\{g \in X : p_{x_i}(g) \leq \varepsilon_i\} \subseteq N$, luego:
$$\bigcap_{i=1}^{n}\{g \in X : p_{x_i}(g - f) \leq \varepsilon_i\} \subseteq N + f = V$$

Esto nos dice que para que la sucesión f_n este en la vecindad V es suficiente que un numero finito de puntos se acerque a f., como sabemos que $f_n(x_i) \to f(x_i)$ para $i = 1, ..., n$, para cada ε_i, existe un n_i tal que para todo $n \geq n_i$, $|f_n(x_i) - f(x_i)| \leq \varepsilon_i$, podemos tomar $\bar{n} = \max_{i=1,\ldots,n} n_i$, y si $n \geq \bar{n}$ $|f_n(x_i) - f(x_i)| \leq \varepsilon_i$, luego :
$$f_n \in \bigcap_{i=1}^{n}\{g \in X : p_{x_i}(g - f) \leq \varepsilon_i\} \subseteq N + f = V$$

para todo $n \geq \bar{n}$.
Otra implicancia $\Longrightarrow$:
Sea $\bar{x} \in [0,1]$ como sabemos que converge, hay que buscar una vecindad conveniente que nos permita deducir la convergencia en el punto $\bar{x}$ para ello tomemos $V = \{g \in X : p_{\bar{x}}(f - g) \leq \varepsilon\}$, como f_n converge a f existe un $\bar{n}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \in V$, i.e $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

3) Recordamos la caracterización de conjunto acotado en un E.V.T donde la topología esta dada por una familia de seminormas:
$$\mathcal{F} \text{ es acotado} \iff \text{para cada seminorma } p\ p(\mathcal{F}) \text{ es acotado}$$

Como en este caso cada semi norma es el valor absoluto de la evaluación en un punto, se tiene lo pedido.

P3. [Sorprendente]

a) Sea X un e.v.t y $f : X \to \mathbb{R}$ lineal y no nula, pruebe que es abierta, i.e mapea abiertos en abiertos.

b) Sea X un e.v.t y $f : X \to \mathbb{R}$ lineal no nula, pruebe que si A es convexo y abierto entonces $f(A)$ es un intervalo abierto.

Una solución

a) Sea A un abierto de X por ver que $f(A)$ es abierto en $\mathbb{R}$ con la topología euclidiana, es decir que para $a \in A$, existe un $\delta > 0$, tal que :

$$B(f(a), \delta) \subseteq f(A)$$

Lo que se hará es tomar un punto $a \in A$, y y ver si se pueden tomar puntos perturbados alrededor de a tales que las imágenes de estos puntos se mantienen cerca de de la imagen de a, para hacer esto notemos que como f es no nula existe un z tal que $f(z) = 1$ usaremos esto como punto de apoyo.

Usando el z como punto de apoyo notemos que si definimos $\bar{x} = a + rz$, se tiene que $f(\bar{x}) = f(x) + r$ en particular tomando $r = y - f(x)$ se tiene que $f(\bar{x}) = y$, de esta forma el problema se reduce a mostrar que existe un $\delta > 0$ lo suficientemente chico tal que para todo $|r| \leq \delta$:

$$a + rz \in A$$

Para ello notemos que $A - a$ es una vecindad del 0 y que $0 \cdot z = 0$, por la continuidad de la multiplicación por escalares , entonces existe una vecindad U de z y δ tal que para todo $|r| \leq \delta$

$$r \cdot U \subseteq A - a$$

En particular como z esta en U se tiene que $rz \in A - a$, i.e $rz + a \in A$, luego juntando todos los ingredientes , tomando el δ obtenido arriba, se propone que

$$B(f(a), \delta) \subseteq f(A)$$

En efecto si $|y - f(a)| < \delta$ se tiene que $\bar{x} = a + (y - f(a))z \in A$, luego $f(\bar{x}) = y$

b) Por la parte anterior sabemos que es abierto, falta demostrar entonces que es un intervalo, para ello sea $x \in f(A)$, $y \in f(A)$ tal que $x < y$, sea ahora un z, tal que $x < z < y$ hay que demostrar que z esta en $f(A)$, para ello , notemos que $x = f(a_1)$, $y = f(a_2)$, luego notemos que z esta en la combinacion convexa de x e y en efecto despejando de la ecuacion:

$$z = x + t(y - x)$$

Se obtiene $0 \leq t = \frac{z-x}{y-x} \leq 1$ luego $z = x + t(y - x) = f(a_1) + t(f(a_2) - f(a_1))$ usando la linealidad de f, $z = f(a_1 + t(a_2 - a_1)$ y como A es convexo $z \in f(A)$.

P4. Conexidad Sea X un e.v.t sobre $\mathbb{R}$.

a) Pruebe que un e.v.t es conexo

b) Sea X un e.v.t localmente convexo , y G un abierto conexo y no vació de X, pruebe que G es arco-conexo.

1) **Ver que un e.v.t es conexo**: Ver que algo es conexo es en general difícil, pero podemos aprovecharnos de que X es un espacio vectorial y mostrar que es arco-conexo.
Proposición Sea $x, y \in X$ entonces la función siguiente es continua:

$$\begin{aligned} f : [0,1] \to& X \\ t \to& f(t) = x + t(y-x) \end{aligned}$$

Para ver esto tendremos que usar la continuidad de la multiplicación por escalares, entonces sea V un vecindario de $f(t)$, entonces $V = f(t) + N$ con N una vecindad del 0, luego hay que encontrar una vecindad U de t, tal que $f(U) \subseteq f(t) + N$, hay que buscar entonces que $f(\bar{t}) \in f(t) + N$, es decir $f = (\bar{t} - t)(x-y)(\bar{t}) - f(t) \in N$, como $0 \cdot (x-y) = 0 \in N$ por la continuidad de la multiplicación por escalares existe un δ tal que para todo $|r| \leq \delta$, $r \cdot (x-y) \in N$, entonces tomando como vecindad de t, $U = [0,1] \cap B(t, \delta)$, se tiene que $f(U) \subseteq V$.
Obs: Notar que demostramos que todo conjunto convexo en un e.v.t es arco-conexo

2) Como G es no-vació sea $g \in G$, definamos el conjunto:

$$F = \{x \in G : \text{Existe una función continua } f : [0,1] \to X \text{ tal que } f(0) = x, f(1) = g\}$$

Notar que F es no vació ya que g esta en F, el objetivo sera ver que F es abierto y cerrado, y al ser G conexo , se tendrá entonces que $F = G$.:
F es abierto
Sea $x \in F$ al ser X abierto existe una vecindad de x, $V_x \subseteq G$, como X es localmente convexo, existe un $C \subseteq V_x$, con C abierto y convexo, por lo demostrado anteriormente C es arco-conexo, luego $C \subseteq F$.
F es cerrado:
Veremos que el complemento es abierto, sea $x \notin F$, entonces g no esta conectado con x , por el argumento de arriba tomando una vecindad convexa de g , se puede concluir que ningún punto de esta vecindad esta conectado con g, si algún punto estuviese conectado con g , x estaría conectado con g, llegando a una contradicción.
Habiendo verificado que F es abierto y cerrado, y distinto de vació, se concluye que $F = G$.

P5. **[Propuesto]** Sea X un e.v.t localmente convexo

Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, entonces demuestre que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0$$