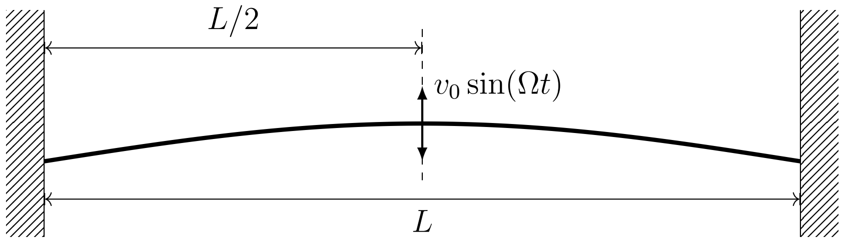
2022-3 FI1100-1 Introducción a la Física Moderna
Profesor: Simón Riquelme Muñoz
Auxiliar: Camilo Núñez Barra
Ayudante: Camila Pulgarés Muñoz

Pauta Auxiliar 3

27 de diciembre de 2022

P1. Modos normales impares

Considere una cuerda de masa M y de longitud L con ambos extremos fijos sometida a una tensión T. Mediante un mecanismo electromecánico se hace oscilar el punto medio de la cuerda con una velocidad dada por la expresión $v_0 \sin(\Omega t)$.



a) **Escriba las condiciones de borde o restricciones apropiadas para el problema.**

Ambos extremos de la cuerda están fijos a la pared, por lo que, ubicando el origen del sistema de referencia en la pared izquierda y considerando $y(x,t)$ como la oscilación transversal, las condiciones de borde son

$$y(x=0,t) = y(x=L,t) = 0, \qquad \forall t\,. \tag{1.1}$$

El sistema está restringido a la condición del mecanismo electromecánico tal que la velocidad de la cuerda es sinusoidal en el punto medio $x = L/2$, es decir,

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{x=L/2} = v_0 \sin(\Omega t), \qquad \forall t\,. \tag{1.2}$$

b) **Suponiendo soluciones de la forma $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + B\sin(kx + \omega t)$, encuentre las longitudes de onda de los modos de oscilación permitidos por este sistema. Bosqueje los primeros 3 modos.**

Suponemos una solución compuesta por la superposición de una onda sinusoidal propagativa hacia la derecha $A\sin(kx - \omega t)$ y otra onda sinusoidal propagativa hacia la izquierda $B\sin(kx + \omega t)$.

Imponemos la condición del borde izquierdo,

$$y(x=0,t) = A\sin(k\cdot 0 - \omega t) + B\sin(k\cdot 0 + \omega t) = (-A + B)\sin(\omega t) \stackrel{!}{=} 0\,, \tag{1.3}$$

ya que el seno es una función impar ($\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$), y como esta igualdad se tiene que cumplir para todo instante t pero $\sin(\omega t)$ no puede ser idénticamente nulo, entonces necesariamente $-A + B = 0$ y obtenemos así que $B = A$ (o bien, como debe anularse para cualquier t, en particular para $t = \pi/2\omega$ tal que $\sin(\omega t) = 1$ y entonces $-A + B = 0$). Utilizando identidades trigonométricas, reescribimos la solución como

$$\begin{aligned}
y(x,t) &= A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t) && (1.4)\\
&= A\left(\sin(kx)\cos(\omega t) - \cos(kx)\sin(\omega t) + \sin(kx)\cos(\omega t) + \cos(kx)\sin(\omega t)\right) && (1.5)\\
&= 2A\sin(kx)\cos(\omega t)\,. && (1.6)
\end{aligned}$$

La condición de borde de la derecha establece que

$$y(x = L, t) = 2A\sin(kL)\cos(\omega t) \overset{!}{=} 0 \tag{1.7}$$

y debe cumplirse para cualquier instante t, por lo tanto, como el coseno no es idénticamente nulo y como $A = 0$ suprime la dinámica del problema, entonces necesariamente $\sin(kL) = 0$. Las raíces del seno son conocidas, $n\pi$ con $n \in \mathbb{N}$. Luego, $kL = n\pi$ y los modos normales hasta ahora son $k_n = n\pi/L$.

Sin embargo, falta imponer la tercera condición. La velocidad vertical de la cuerda es

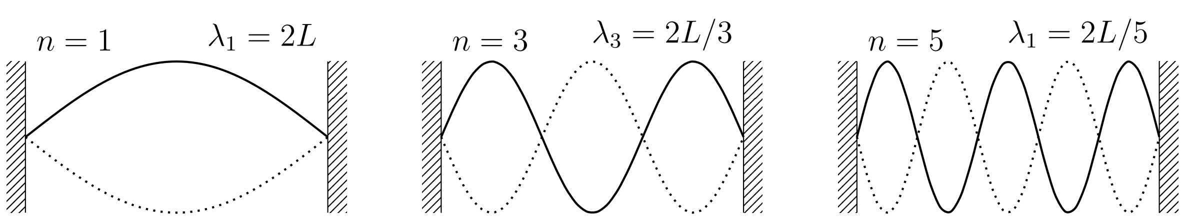
$$\frac{\partial y_n(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(2A\sin(k_n x)\cos(\omega t)) = -2A\omega\sin(k_n L)\sin(\omega t) \tag{1.8}$$

y aplicando la restricción,

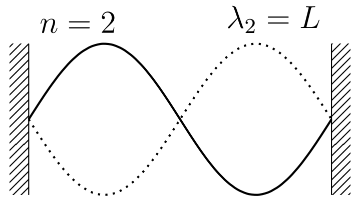
$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{x=L/2} = -2A\omega\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(\omega t) \overset{!}{=} v_0\sin(\Omega t)$$

que es una igualdad que se debe cumplir en todo momento t, por lo tanto, las partes oscilatorias y constantes deben ser iguales cada una por separado, es decir, $\sin(\omega t) = \sin(\Omega t)$ y $-2A\omega\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = v_0$. Obtenemos de la primera igualdad que $\omega = \Omega$ y de la segunda que $A = -v_0/2\omega\sin(n\pi/2)$, pero esta amplitud no puede ser infinita, por lo tanto, $\sin(n\pi/2)$ no puede anularse, es decir, el argumento del seno no puede ser de la forma $m\pi$ con m entero, luego, n no puede ser par. Físicamente, si n es par, entonces $y(x = L/2, t) = 0$, lo que significaría que el centro está fijo, suprimiendo completamente el mecanismo electromecánico.

Así, solamente los modos de oscilación con n impar están permitidos. Las longitudes de onda tienen la forma $\lambda_n = 2\pi/k_n = 2L/n$ con n impar, o bien, explícitamente, $\lambda_{2m-1} = 2L/(2m-1)$ con m natural. Las longitudes de onda de los tres primer modos de oscilación permitidos por este sistema son $\lambda_1 = 2L$, $\lambda_3 = 2L/3$ y $\lambda_5 = 2L/5$, y las bosquejamos a continuación.



Además, bosquejando $n = 2$ notamos que efectivamente corresponde a un modo no permitido ya que suprime el movimiento del punto del medio.



c) **Escriba la función $y_n(x,t)$ simplificada para la forma de la onda en el n-ésimo modo.**

Considerando modos impares $k_n = (2n-1)\pi/L$, escribimos la solución de la forma

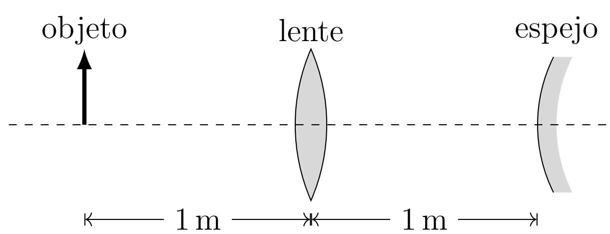
$$y_n(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t) = \frac{-v_0}{\Omega\sin((2n-1)\pi/2)}\sin\Big((2n-1)\frac{\pi}{L}x\Big)\cos(\Omega t)\,, \tag{1.9}$$

pero $\sin((2n-1)\pi/2) = (-1)^{n+1}$ pues $\sin(\pi/2) = \sin(5\pi/2) = \cdots = 1$ y por otro lado $\sin(3\pi/2) = \sin(7\pi/2) = \cdots = -1$. Concluimos que la solución final simplificada es

$$y_n(x,t) = \frac{-v_0}{\Omega(-1)^{n+1}}\sin\Big((2n-1)\frac{\pi}{L}x\Big)\cos(\Omega t) = (-1)^n\frac{v_0}{\Omega}\sin\Big((2n-1)\frac{\pi}{L}x\Big)\cos(\Omega t)\,. \tag{1.10}$$

P2. [P3 C2 Sec 5 2022-2] Lente y espejo

Una lente convergente y un espejo convexo se encuentran separados por una distancia de $1\,\mathrm{m}$. Un objeto se coloca a $1\,\mathrm{m}$ a la izquierda del lente como muestra la figura. Si las distancias focales del lente y del espejo son $+70\,\mathrm{cm}$ y $-50\,\mathrm{cm}$, respectivamente.



a) **Encuentre la posición final de la imagen formada por la luz que pasa dos veces a través del lente.**

Recordemos que la relación entre distancia de objeto s y distancia de imagen s' tanto para una lente delgada de distancia focal f como para un espejo esférico de distancia focal f es (bajo apromación paraxial)

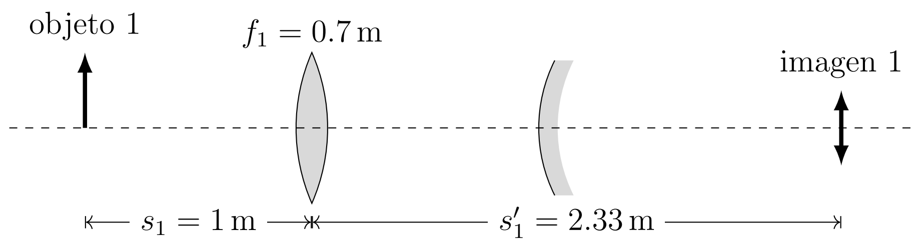
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Longrightarrow s' = \frac{sf}{s-f}\,. \tag{2.1}$$

Utilizamos la convención de que $s > 0$ cuando el objeto está del lado de los rayos entrantes (y $s < 0$ cuando no está del lado de los rayos entrantes) y $s' > 0$ cuando la imagen está del lado de los rayos salientes ($s' < 0$ cuando la imagen no está del lado de los rayos salientes).

Imagen 1.- El objeto irradia luz de izquierda a derecha. El lado entrante es la izquierda de la lente y el lado saliente es la derecha de la lente. El objeto está a una distancia $s_1 = 1\,\mathrm{m}$ de la lente delgada de distancia focal $f_1 = 0.7\,\mathrm{m}$. Luego, la distancia de la imagen 1 s_1' es

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{f_1} \implies s_1' = \frac{7}{3}\,\mathrm{m} \approx 2.33\,\mathrm{m} \tag{2.2}$$

a la derecha de la lente por tener signo positivo, o bien, a 1.33 m a la derecha del espejo.



(no nos preocupamos aún del tamaño ni ortientación de la imagen.)

Imagen 2.- La imagen anterior es ahora objeto para el espejo. Este objeto aparece a una distancia $s_2 = -1.33\,\mathrm{m}$ del espejo, con el signo negativo indicando que no está del lado de los rayos entrantes (porque en este caso tanto rayos entrantes como salientes están del lado izquierdo ya que no pueden atravesar el espejo y solo pueden reflejarse). El espejo tiene distancia focal $f_2 = -0.5\,\mathrm{m}$ por ser convexo. Luego, la distancia de la imagen 2 s_2' es

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{f_2} \implies s_2' = \frac{-1.33\,\mathrm{m} \times -0.5\,\mathrm{m}}{-1.33\,\mathrm{m} + 0.5\,\mathrm{m}} = \frac{4}{5}\,\mathrm{m} = -0.8\,\mathrm{m}\,, \tag{2.3}$$

donde el signo negativo indica que está a la derecha del espejo (imagen del lado que no es saliente).

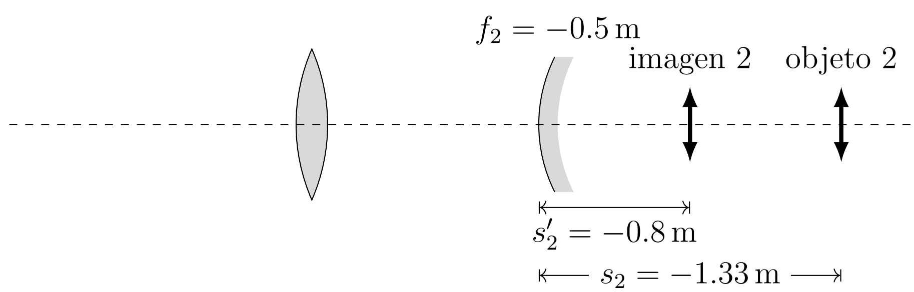
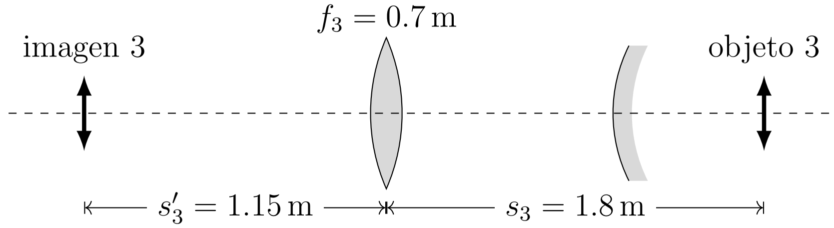


Imagen 3.- La luz hasta ahora ha viajado hacia la derecha pero ahora se tiene que devolver reflejándose hacia la izquierda. La imagen formada por el espejo sirve como objeto para la lente. Ahora el lado derecho es el lado entrante y el lado izquierdo es el lado saliente, por lo que la distancia de objeto es $s_3 = 1.8\,\mathrm{m}$ (con signo positivo porque está del lado entrante) y la distancia focal sigue siendo $f_3 = 0.7\,\mathrm{m}$. Luego, la distancia de imagen 3 s_3' es

$$\frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_3'} = \frac{1}{f_3} \implies s_2' = \frac{63}{55}\,\mathrm{m} \approx 1.15\,\mathrm{m}\,. \tag{2.4}$$



Concluimos que la posición final de la imagen formada por la luz que pasa dos veces a través del lente es $1.15\,\mathrm{m}$ a la izquierde del lente.

b) **Determine la magnificación de esta imagen. ¿Es una imagen derecha o invertida?**

La magnificación total M es la multiplicación de las magnificaciones individuales de cada imagen: m_1, m_2 y m_3. (Si no recordamos si es la suma o la multiplicación, entonces podemos analizar que si tenemos un sistema con dos lentes: uno que primero duplica el tamaño ($m = 2$) y otro que luego lo divide a la mitad ($m = \frac{1}{2}$), entonces tiene sentido que la magniticación total sea 1, correspondiente a la multiplicación y no la suma). La magnificación individual para estas lentes delgadas y espejos esféricos va a tener la forma

$$m = -\frac{s'}{s}\,. \tag{2.5}$$

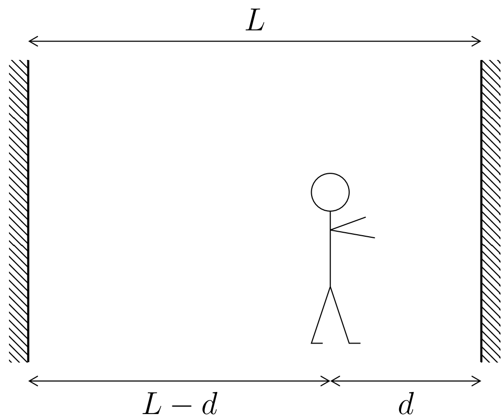
Luego, la magniticación de la imagen final es

$$M = m_1 m_2 m_3 = \frac{-s_1'}{s_1}\frac{-s_2'}{s_2}\frac{-s_3'}{s_3} = \left(-\frac{2.33\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}}\right)\left(-\frac{-0.8\,\mathrm{m}}{-1.34\,\mathrm{m}}\right)\left(-\frac{1.15\,\mathrm{m}}{1.8\,\mathrm{m}}\right) \approx -0.9\,, \tag{2.6}$$

es decir, corresponde a una imagen de menor tamaño que el objeto original porque $|M| < 1$, y como $M < 0$ entonces concluimos que es una imagen invertida (con respecto al objeto original).

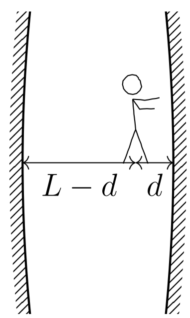
P3. [Ej4 Sec 8 2021-2] Espejos en ascensor

Cuando uno entra en un ascensor con espejos en las paredes, se ve reflejado muchas veces (infinitas si los espejos fueran perfectos). Esto se entiende de la siguiente forma. Digamos que estamos mirando el espejo de la derecha, tal como está en la figura. Entonces, nosotros producimos una imagen a una distancia d de este espejo. Luego, esa imagen produce otra imagen a una distancia $L + d$ en el espejo de la izquierda, la que a su vez produce otra imagen, esta vez a una distancia $2L + d$ en espejo de la derecha. Y así sucesivamente. Estas son imágenes de nuestro frente. Por otro lado, nuestra espalda se refleja primero en el espejo de la izquierda, produciendo una imagen a una distancia $L - d$. Esa imagen se refleja en el espejo de la derecha, generando una nueva imagen a una distancia $2L - d$ y así sucesivamente. Por ser espejos rectos, todos estas imágenes tienen nuestro mismo tamaño.



Suponga ahora que los espejos no son rectos sino que levemente esféricos, con un radio de curvatura R que cumple $R \gg L$. Si ambos espejos son cóncavos, calcule a qué distancia se forman las primeras 4 imágenes que vemos (dos de nuestro frente y dos de nuestra espalda). ¿Son estas más grandes o más chicas que uno? Use los siguientes datos $L = 2\,\mathrm{m}$, $d = 0.5\,\mathrm{m}$, $R = 20\,\mathrm{m}$.

La nueva situación con espejos curvos en el ascensor se muestra en la siguiente figura.



La clave para resolver este ejercicio es recordar la fórmula que relaciona la distancia de objeto s con la distancia de imagen s' para un espejo esférico con radio de curvatura R:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R},$$

y aplicarla repetidamente respetando las reglas de signos. Ambos espejos esféricos son cóncavos y tienen el mismo radio de curvatura $R = 20\,\mathrm{m}$. La distancia de imagen se puede despejar directamente,

$$s' = \frac{sR}{2s - R}.$$

Se puede saber si las imágenes son más grandes o más chicas recordando la magnificación m para un espejo esférico,

$$m = -\frac{s'}{s},$$

donde $|m| > 1$ cuando la imagen es más grande que el objeto y $|m| < 1$ cuando la imagen es más pequeña que el objeto. Notar que el enunciado pide esta comparación de tamaño con respecto a la persona, por lo que es de interés la magnificación total, que es el producto de las magnificaciones individuales.

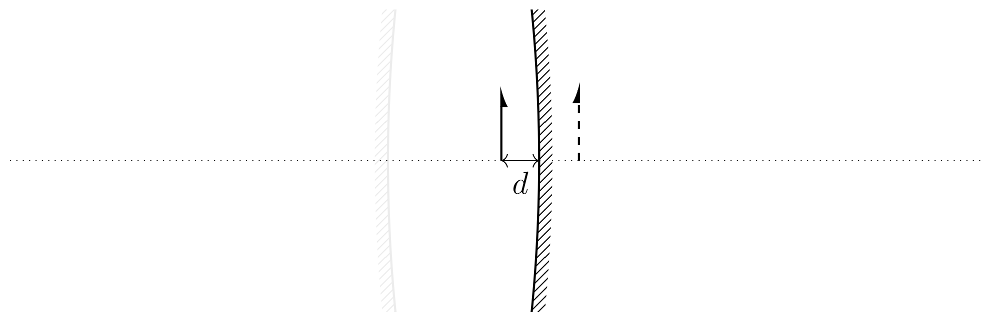
1F) Primera imagen del frente: Se reconoce que la distancia de objeto es $s_{1\mathrm{F}} = d = 0.5\,\mathrm{m}$. La distancia de imagen es, entonces, (reemplazando directamente en la fórmula anterior)

$$s'_{1\mathrm{F}} = -\frac{10}{19}\,\mathrm{m} \approx -0.53\,\mathrm{m},$$

es decir, la primera imagen del frente se forma a $1.03\,\mathrm{m}$ a la derecha de la persona, pues el signo negativo en $s'_{1\mathrm{F}}$ indica que la imagen está dentro del espejo cóncavo (por convención de signos, del lado que no es saliente). Luego, la magnificación es, (utilizando directamente la fórmula especificada)

$$m_{1\mathrm{F}} = \frac{20}{19} \approx 1.05,$$

es decir, la primera imagen del frente de la persona es más grande que la persona.



2F) Segunda imagen del frente: Ahora, $s_{2\mathrm{F}} = L + |s'_{1\mathrm{F}}| = 48/19\,\mathrm{m} \approx 2.53\,\mathrm{m}$. La distancia de imagen es, entonces,

$$s'_{2\mathrm{F}} = -\frac{240}{71}\,\mathrm{m} \approx -3.38\,\mathrm{m},$$

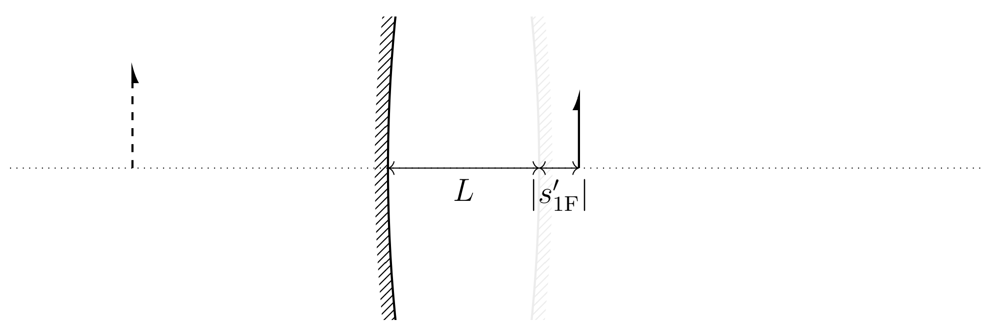
es decir, la segunda imagen del frente se forma a $4.88\,\mathrm{m}$ a la izquierda de la persona. Podemos relacionar este comportamiento con nuestra experiencia dentro de un ascensor con espejos planos, en el que las imágenes se van alejando al igual que ahora.
Luego, la magnificación es,

$$m_{2\mathrm{F}} = \frac{95}{71} \approx 1.34,$$

y la magnificación total es,

$$m_{2\mathrm{F(T)}} = m_{2\mathrm{F}} m_{1\mathrm{F}} = \frac{100}{71} \approx 1.41,$$

es decir, la segunda imagen del frente de la persona es más grande que la persona.



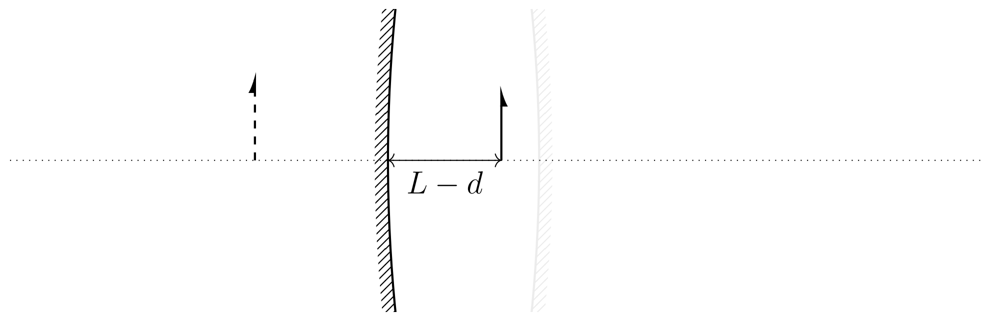
1E) Primera imagen de la espalda: Se reconoce que la distancia de objeto es $s_{1\mathrm{E}} = L - d = 1.5\,\mathrm{m}$. La distancia de imagen es, entonces,

$$s'_{1\mathrm{E}} = -\frac{30}{17}\,\mathrm{m} \approx -1.76\,\mathrm{m},$$

es decir, la primera imagen de la espalda se forma a $3.26\,\mathrm{m}$ a la izquierda de la persona. Luego, la magnificación es,

$$m_{1\mathrm{E}} = \frac{20}{17} \approx 1.18,$$

es decir, la primera imagen de la espalda de la persona es más grande que la persona.



2E) Segunda imagen de la espalda: Ahora, $s_{2\mathrm{E}} = L + |s'_{1\mathrm{E}}| = 64/17\,\mathrm{m} \approx 3.76\,\mathrm{m}$. La distancia de imagen es, entonces,

$$s'_{2\mathrm{E}} = -\frac{320}{53}\,\mathrm{m} \approx -6.04\,\mathrm{m},$$

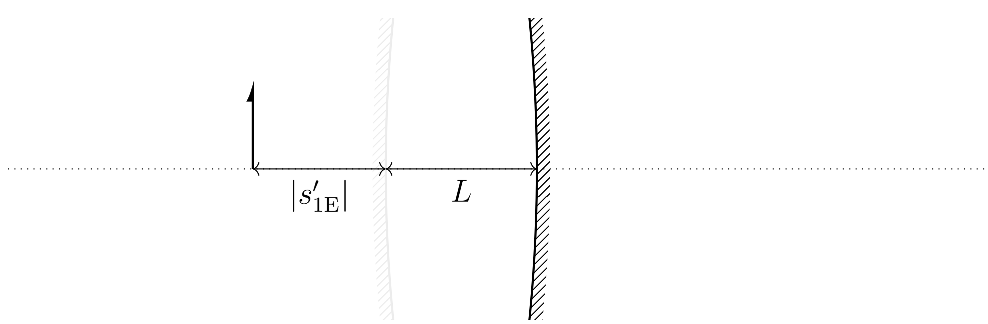
es decir, la segunda imagen de la espalda se forma a $6.54\,\mathrm{m}$ a la derecha de la persona. Luego, la magnificación es,

$$m_{2\mathrm{E}} = \frac{85}{53} \approx 1.60,$$

y la magnificación total es,

$$m_{2\mathrm{E(T)}} = m_{2\mathrm{E}} m_{1\mathrm{E}} = \frac{100}{53} \approx 1.89,$$

es decir, la segunda imagen de la espalda de la persona es más grande que la persona.



Si llegaste hasta acá, te recomiendo ver `https://youtu.be/zRP82omMX0g` 'INSIDE a Spherical Mirror', un video de Vsauce sobre espejos con el caso de un espejo esférico $R = L/2$.