2022-3 FI1100-1 Introducción a la Física Moderna
Profesor: Simón Riquelme Muñoz
Auxiliar: Camilo Núñez Barra
Ayudante: Camila Pulgarés Muñoz

Pauta Auxiliar 6

4 de enero de 2022

P1. [P2D C2 2021-2] Efecto fotoeléctrico

Una fuente de luz de longitud de onda λ ilumina un metal y eyecta fotoelectrones de una energía cinética máxima de $2\,\mathrm{eV}$. Una segunda fuente de luz con la mitad de la longitud de onda de la primera eyecta fotoelectrones con una máxima energía cinética de $8\,\mathrm{eV}$.

Considere $hc = 1.2\,\mathrm{eV\,\mu m}$, $m_\mathrm{e} = 9.1\times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ y $1\,\mathrm{eV} = 1.6\times 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

a) Determine la función trabajo del metal.

La primera fuente de longitud de onda $\lambda_1 = \lambda$ causa la emisión de fotoelectrones de energía cinética máxima $K_1 = 2\,\mathrm{eV}$, y gracias al efecto fotoeléctrico sabemos que

$$K_1 = \frac{hc}{\lambda_1} - \phi, \tag{1.1}$$

donde ϕ es la función trabajo del metal y hc/λ es la energía de un fotón de longitud de onda λ. Análogamente, la segunda fuente ilumina con $\lambda_2 = \lambda/2$ el mismo metal de función trabajo ϕ y eyecta fotoelectrones de una energía cinética máxima $K_2 = 8\,\mathrm{eV}$, por lo que

$$K_2 = \frac{hc}{\frac{\lambda}{2}} - \phi. \tag{1.2}$$

Restando ambas ecuaciones,

$$K_2 - K_1 = \frac{hc}{\lambda}, \tag{1.3}$$

de donde podemos despejar la longitud de onda,

$$\lambda = \frac{hc}{K_2 - K_1}. \tag{1.4}$$

Ahora despejamos la función trabajo de la primera ecuación y reemplazamos la longitud de onda encontrada para obtener

$$\phi = \frac{hc}{\lambda} - K_1 = \frac{hc}{\frac{hc}{K_2 - K_1}} - K_1 = K_2 - K_1 - K_1 = K_2 - 2K_1 \tag{1.5}$$

y evaluando numéricamente concluimos que

$$\phi = K_2 - 2K_1 = 8\,\mathrm{eV} - 2\times 2\,\mathrm{eV} = 4\,\mathrm{eV}. \tag{1.6}$$

b) **Calcule las longitudes de onda de ambas fuentes de luz.**

Ahora evaluamos numéricamente la longitud de onda,

$$\lambda = \frac{hc}{K_2 - K_1} = \frac{1.2\,\mathrm{eV\,\mu m}}{8\,\mathrm{eV} - 2\,\mathrm{eV}} = \frac{1.2\,\mathrm{eV\,\mu m}}{6\,\mathrm{eV}} = 0.2\,\mathrm{\mu m}, \tag{1.7}$$

por lo que la primera fuente de luz tiene longitud de onda $\lambda_1 = \lambda = 0.2\,\mathrm{\mu m} = 200\,\mathrm{nm}$ y la segunda fuente de luz tiene longitud de onda $\lambda_2 = \lambda/2 = 0.1\,\mathrm{\mu m} = 100\,\mathrm{nm}$.

Considere ahora las dos fuentes de luz mencionadas anteriormente irradiando otro metal desconocido.

c) **Determine la función trabajo del metal considerando que la fuente de luz con los fotones menos energéticos coincide con la frecuencia umbral del metal.**

La primera fuente tiene fotones de energía $E_1 = hc/\lambda = 1.2\,\mathrm{eV\,\mu m}/0.2\,\mathrm{\mu m} = 6\,\mathrm{eV}$, mientras que la segunda fuente tiene fotones de energía $E_2 = hc/\frac{\lambda}{2} = 1.2\,\mathrm{eV\,\mu m}/0.1\,\mathrm{\mu m} = 12\,\mathrm{eV}$, por lo tanto, los fotones menos energéticos son los de longitud de onda λ_1, lo que tiene sentido pues sabemos que es la longitud de onda mayor y además la energía es inversamente proporcional a esta.

Esta longitud de onda λ_1 coincide con la frecuencia umbral del metal, que es la frecuencia mínima (longitud de onda máxima) para que se emitan fotoelectrones, y es tal que su energía cinética es nula, $K_1' = 0 = hc/\lambda_1 - \phi'$, entonces la función trabajo ϕ' del nuevo metal es

$$\phi' = \frac{hc}{\lambda} = 6\,\mathrm{eV}. \tag{1.8}$$

d) **Calcule la velocidad máxima de los electrones eyectados debido a la fuente de luz con los fotones más energéticos en este nuevo metal.**

Los fotones más energéticos son los de longitud de onda λ_2, ya que es la longitud de onda menor y la energía es inversamente proporcional a esta. Los fotoelectrones eyectados debido a la segunda fuente tienen una energía cinética máxima K_2' dada por el efecto fotoelétrico en el nuevo metal

$$K_2' = E_2 - \phi' = 12\,\mathrm{eV} - 6\,\mathrm{eV} = 6\,\mathrm{eV}. \tag{1.9}$$

La energía cinética K de un electrón de masa m_e y velocidad v está dada por

$$K = \frac{1}{2} m_\mathrm{e} v^2, \tag{1.10}$$

de donde podemos despejar la velocidad para obtener

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m_\mathrm{e}}}.$$

Por lo tanto, la velocidad máxima de los electrones eyectados debido a la fuente de luz con los fotones más energéticos en este nuevo metal es (recordando que $\mathrm{J} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$)

$$v_\mathrm{max} = \sqrt{\frac{2K_2'}{m_\mathrm{e}}} = \sqrt{\frac{2 \times 6\,\mathrm{eV}}{9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{2 \times 6 \times 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}}{9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = 1.45 \times 10^{6}\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

P2. [P3A C3 2020-2] Efecto fotoeléctrico

En un experimento de efecto fotoeléctrico se observa que para luz de longitud de onda de $400\,\mathrm{nm}$ los fotoelectrones tienen una energía máxima de $3.2 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$ y para luz de longitud de onda de $600\,\mathrm{nm}$ los fotoelectrones tienen una energía máxima de $1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$. Calcule, a partir de estos datos, la función trabajo del material y la constante de Planck.

Recordemos que en el efecto fotoeléctrico la energía cinética máxima K_{max} de los fotoelectrones eyectados del metal de función trabajo ϕ debido a una fuente de fotones de longitud de onda λ satisface la relación

$$K_{\mathrm{max}} = \frac{hc}{\lambda} - \phi. \tag{2.1}$$

Sabemos del primer experimento que

$$3.2 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} = \frac{hc}{400\,\mathrm{nm}} - \phi \tag{2.2}$$

y del segundo experimento que

$$1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} = \frac{hc}{600\,\mathrm{nm}} - \phi, \tag{2.3}$$

con $c = 3 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, por lo que tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas h y ϕ, que podemos resolver con nuestro método favorito.

Restando la segunda ecuación a la primera,

$$1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} = hc\left(\frac{1}{400\,\mathrm{nm}} - \frac{1}{600\,\mathrm{nm}}\right) = h\frac{3 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{1200 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}} \tag{2.4}$$

de donde podemos despejar el valor de la constante de Planck,

$$h = \frac{1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} \times 1200 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}}{3 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 6.4 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}. \tag{2.5}$$

Notemos que el valor de h es muy pequeño pero no debemos despreciarlo. Al trabajar directamente con todos sus decimales en una calculadora podríamos obtener un valor aproximado igual a 0, por lo que necesitamos trabajar en notación científica con los coeficientes y exponentes por separado.

Ahora despejamos ϕ de cualquiera de las ecuaciones y concluimos que el valor de la función trabajo del material es (tomando la primera ecuación)

$$\begin{aligned}\phi = \frac{6.4 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \times 3 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{400 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}} - 3.2 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} &= 4.8 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} - 3.2 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} \\ &= 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}\end{aligned} \tag{2.6}$$

P3. [P3C C3 2020-2] Efecto fotoeléctrico

Se realiza un experimento del efecto fotoeléctrico, exponiendo una superficie de metal de Sodio de superficie $1.0\,\mathrm{mm}^2$ a la luz del Sol, que supondremos para simplificar que tiene una única longitud de onda de $500\,\mathrm{nm}$. La función trabajo del metal es $2.28\,\mathrm{eV}$.

Nota: Potencia es la energía por unidad de tiempo y se expresa en $\mathrm{W} = \mathrm{J\,s^{-1}}$. Intensidad es la potencia por unidad de área.

a) **Calcule el número de fotoelectrones por segundo que se eyectan de una superficie de metal de Sodio cuando la radiación solar tiene una intensidad de $1.3\,\mathrm{kW\,m^{-2}}$ (correspondiente a la intensidad de la luz solar sobre la capa atmosférica terrestre).**

Corroboremos primeramente que hay efecto fotoeléctrico. Para esto, la energía E de los fotones de longitud de onda λ debe ser mayor a la función trabajo $\phi = 2.28\,\mathrm{eV}$ (de otro modo, la energía cinética de los fotoelectrones sería negativa según la fórmula, y esto no puede ocurrir). Calculamos que

$$E = hc/\lambda = 1.2\,\mathrm{eV\,\mu m}/0.5\,\mathrm{\mu m} = 2.4\,\mathrm{eV} > \phi, \tag{3.1}$$

por lo que efectivamente hay efecto fotoeléctrico y podemos proseguir. Así, los fotoelectrones se eyectan con una energía cinética máxima

$$K = E - \phi = 0.12\,\mathrm{eV}. \tag{3.2}$$

El Sol actúa como una fuente de fotones de intensidad $I = 1.3\,\mathrm{kW\,m^{-2}}$ que llega a la superficie de metal de Sodio de área $A = 1.0\,\mathrm{mm}^2$ con una potencia

$$P = IA = 1.3 \times 10^3\,\mathrm{W\,m^{-2}} \times 1.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 = 1.3 \times 10^{-3}\,\mathrm{W}. \tag{3.3}$$

Ya que la potencia es energía por unidad de tiempo, entonces si cada fotón llega con energía $E = 2.4\,\mathrm{eV}$, el número total de fotones que llega por unidad de tiempo es

$$n = \frac{P}{E} = \frac{1.3 \times 10^{-3}\,\mathrm{J\,s^{-1}}}{2.4 \times 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}} = 3.4 \times 10^{15}\,\mathrm{s^{-1}} \tag{3.4}$$

y como cada fotón en el efecto fotoeléctrico excita únicamente un solo electrón del metal, el número de fotoelectrones eyectados por segundo es $3.4 \times 10^{15}\,\mathrm{s^{-1}}$.

b) **¿Qué potencia se llevan consigo los fotoelectrones?**

Como los fotones llegan con una energía $E = 2.4\,\mathrm{eV}$ y la función trabajo es $\phi = 2.28\,\mathrm{eV}$, entonces los fotoelectrones se llevan consigo un exceso de energía de $K = E - \phi = 0.12\,\mathrm{eV}$, que equivale a una fracción $\alpha = K/E = 0.12\,\mathrm{eV}/2.4\,\mathrm{eV} = 0.05$ de la energía original. Así, la potencia que se llevan consigo los fotoelectrones es igual a $\alpha P = 0.05 \times 1.3 \times 10^{-3}\,\mathrm{W} = 6.5 \times 10^{-5}\,\mathrm{W}$.

P4. [P3A C2 2021-2] Átomo de hidrógeno

El electrón de un átomo de hidrógeno inicialmente se encuentra en el estado $n = 2$, luego absorbe un fotón y pasa a estar en el nivel $n = 4$.

a) **¿Qué frecuencia debe tener el fotón?**

Los niveles de energía del átomo de hidrógeno son

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \qquad (n = 1, 2, 3, 4, \dots) \tag{4.1}$$

con $E_0 = 13.6\,\mathrm{eV}$ la energía de ionización y n el número cuántico principal del nivel. La energía hf del fotón absorbido de frecuencia f debe ser la diferencia entre la energía del nivel mayor ($n = 4$) y el menor ($n = 2$),

$$hf = E_4 - E_2, \tag{4.2}$$

por lo tanto, despejamos para concluir que debe tener una frecuencia

$$f = \frac{E_4 - E_2}{h} = -\frac{E_0}{h}\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{13.6\,\mathrm{eV}}{4.1 \times 10^{-15}\,\mathrm{eV\,s}} \times \frac{3}{16} = 0.62 \times 10^{15}\,\mathrm{Hz}. \tag{4.3}$$

b) **Luego, el mismo electrón decae a estados inferiores, hasta llegar al estado fundamental. ¿Cuáles son todas las posibles frecuencias de los fotones emitidos? (Recuerde que la transición puede no ser directa, esto significa que puede pasar por otros estados antes de llegar al estado final).**

Ahora el electrón decae de $n = 4$ al estado fundamental $n = 1$, pudiendo realizar transiciones por niveles intermedios, es decir, las posibles transiciones son:

$$4 \to 1 \tag{4.4}$$
$$4 \to 2 \to 1 \tag{4.5}$$
$$4 \to 3 \to 1 \tag{4.6}$$
$$4 \to 3 \to 2 \to 1 \tag{4.7}$$

por lo tanto, son 6 todas las posibles frecuencias distintas de fotones emitidos ($2 \to 1$ y $4 \to 3$ se repiten). Considerando n_i el nivel inicial (mayor) y n_f el nivel final (menor), entonces la fórmula de la frecuencia es

$$f = \frac{E_\mathrm{i} - E_\mathrm{f}}{h} = \frac{E_0}{h}\left(\frac{1}{n_\mathrm{f}^2} - \frac{1}{n_\mathrm{i}^2}\right) = 3.3 \times 10^{15}\left(\frac{1}{n_\mathrm{f}^2} - \frac{1}{n_\mathrm{i}^2}\right)\,\mathrm{Hz}, \tag{4.8}$$

que para cada transición nos da

$$4 \to 1: \quad f_{4\to 1} = \frac{E_0}{h}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2}\right)\mathrm{Hz} = 3.3 \times 10^{15} \times \frac{15}{16}\,\mathrm{Hz} = 3.09 \times 10^{15}\,\mathrm{Hz} \tag{4.9}$$

$$3 \to 1: \quad f_{3\to 1} = \frac{E_0}{h}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right)\mathrm{Hz} = 3.3 \times 10^{15} \times \frac{8}{9}\,\mathrm{Hz} = 2.93 \times 10^{15}\,\mathrm{Hz} \tag{4.10}$$

$$2 \to 1: \quad f_{2\to 1} = \frac{E_0}{h}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)\mathrm{Hz} = 3.3 \times 10^{15} \times \frac{3}{4}\,\mathrm{Hz} = 2.48 \times 10^{15}\,\mathrm{Hz} \tag{4.11}$$

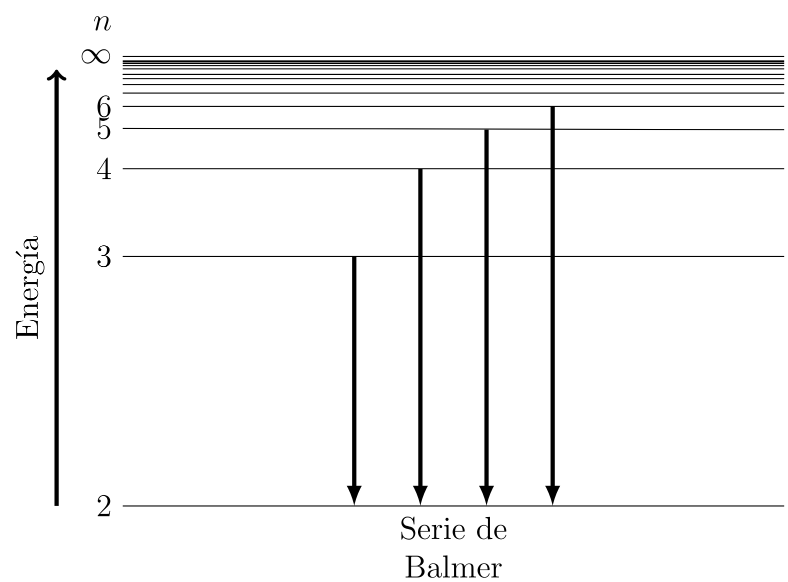
$$4 \to 2: \quad f_{4\to 2} = \frac{E_0}{h}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)\text{Hz} = 3.3 \times 10^{15} \times \frac{3}{16}\,\text{Hz} = 0.62 \times 10^{15}\,\text{Hz} \tag{4.12}$$

$$3 \to 2: \quad f_{3\to 2} = \frac{E_0}{h}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)\text{Hz} = 3.3 \times 10^{15} \times \frac{5}{36}\,\text{Hz} = 0.46 \times 10^{15}\,\text{Hz} \tag{4.13}$$

$$4 \to 3: \quad f_{4\to 3} = \frac{E_0}{h}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right)\text{Hz} = 3.3 \times 10^{15} \times \frac{7}{144}\,\text{Hz} = 0.16 \times 10^{15}\,\text{Hz}. \tag{4.14}$$

P5. [P2 C3 2022-2] Átomo de hidrógeno

La serie de Balmer para el átomo de Hidrógeno corresponde a transiciones electrónicas que terminan en el estado con número cuántico $n = 2$. Considere el fotón del longitud de onda más larga correspondiente a una de las transiciones mostradas en la figura que se representan por flechas. Para esta configuración:



a) Determine su energía.

Recordemos que los nivel de energía E_n del átomo de hidrógeno son inversamente proporcionales al cuadrado del número cuántico principal del nivel n,

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}, \tag{5.1}$$

con $E_0 = 13.6\,\mathrm{eV}$ la energía de ionización.

Además, sabemos que la energía E de un fotón es directamente proporcional a su frecuencia f (con constante de proporcionalidad h) e inversamente proporcional a su longitud de onda λ (con constante de proporcionalidad hc), por lo tanto, el fotón de longitud de onda más larga corresponde al fotón emitido en la transición de menor diferencia de energía.

Notemos que, en la serie de Balmer, la energía final está fija en el nivel $n_\mathrm{f} = 2$, por lo que la diferencia de energía es $\Delta E_{n_\mathrm{i}\to 2} = E_i - E_2$, con $n_\mathrm{i} = 3, 4, 5, 6$ según la figura. Así, la energía inicial que causa la menor ΔE es E_3, y la energía del fotón solicitado es

$$\Delta E_{3\to 2} = E_3 - E_2 = -\frac{E_0}{3^2} + \frac{E_0}{2^2} = -1.51\,\mathrm{eV} + 3.4\,\mathrm{eV} = 1.89\,\mathrm{eV}. \tag{5.2}$$

b) Determine su longitud de onda.

Una vez conocida la energía del fotón emitido, podemos calcular la longitud de onda como

$$\lambda_{3\to 2} = \frac{hc}{\Delta E_{3\to 2}} = \frac{1.2\,\mathrm{eV\,\mu m}}{1.89\,\mathrm{eV}} = 635\,\mathrm{nm}. \tag{5.3}$$

Ahora considere la línea espectral de longitud de onda más corta correspondiente a una de las transiciones mostradas en la figura anterior que se representan por flechas. Para esto:

c) **Determine su energía.**

Sabemos que longitud de onda más corta corresponde al fotón emitido en la transición con la mayor diferencia de energía, por lo que la energía del fotón pedido es

$$\Delta E_{6\to 2} = E_6 - E_2 = -0.37\,\mathrm{eV} + 3.4\,\mathrm{eV} = 3.03\,\mathrm{eV}. \tag{5.4}$$

d) **Determine su longitud de onda.**

La longitud de onda de este fotón es

$$\lambda_{6\to 2} = \frac{hc}{\Delta E_{6\to 2}} = \frac{1.2\,\mathrm{eV\,\mu m}}{3.03\,\mathrm{eV}} = 396\,\mathrm{nm} \tag{5.5}$$

Ahora, si pudiera tener acceso a cualquiera de los niveles de energía posibles (no solamente los mostrados con flechas en la figura anterior), ¿cuál es la longitud de onda más corta posible en la serie de Balmer?

Ahora consideramos que el nivel inicial puede ser $n_\mathrm{i} = 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, \infty$, pero el nivel final sigue fijo en $n_\mathrm{f} = 2$ por ser una transición en la serie de Balmer. La mayor diferencia de energía es cuando el nivel inicial tiene la menor energía posible en magnitud, por lo tanto, considerando que la energía disminuye en magnitud con n, entonces la energía de este fotón es

$$\Delta E_{\infty\to 2} = E_\infty - E_2 = 0 + 3.4\,\mathrm{eV} = 3.4\,\mathrm{eV}, \tag{5.6}$$

y entonces la longitud de onda más corta posible en la serie de Balmer es

$$\lambda_{\infty\to 2} = \frac{hc}{\Delta E_{\infty\to 2}} = 353\,\mathrm{nm}. \tag{5.7}$$

P6. [P1 C3 2022-2] Cuantización de Bohr

Un satélite artificial de masa $m = 1\,\mathrm{kg}$ gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio prácticamente igual al de la propia Tierra $R_\mathrm{T} \sim 6370\,\mathrm{km}$. Considerando que las órbitas del satélite están cuantizadas según la regla de Bohr, determine la variación del radio de la órbita cuando va de un nivel cuantizado al próximo (es decir, del nivel n al $n+1$). Para esto, recuerde que la aceleración de gravedad en la superficie es $g \sim 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Comente sobre la posibilidad de observar dichas transiciones.

Notemos la analogía de este sistema con el del átomo de hidrógeno, pudiendo establecer la correspondencia $\langle$electrón $\leftrightarrow$ satélite$\rangle$ y $\langle$Tierra $\leftrightarrow$ protón$\rangle$.

Describamos el movimiento del satélite alrededor de la Tierra de manera clásica con la segunda ley de Newton:

$$F = ma, \tag{6.1}$$

donde la fuerza F en este caso está dada por la ley de gravitación universal (en vez de ley de Coulomb) y es igual a

$$F = -G\frac{mM_\mathrm{T}}{r^2} \tag{6.2}$$

con G la constante de gravitación universal de Newton, M_T la masa de la Tierra, m la masa del satélite y r la distancia entre la Tierra y el satélite; y además consideramos que el satélite tiene una aceleración centrípeta

$$a_c = -\frac{v^2}{r} \tag{6.3}$$

con v la velocidad del satélite. Así,

$$-G\frac{mM_\mathrm{T}}{r^2} = -m\frac{v^2}{r} \Longrightarrow GM_\mathrm{T} = rv^2. \tag{6.4}$$

Ahora queremos aplicar el método de cuantización de Bohr, por lo que introducimos la magnitud del momento angular L:

$$L = rp = mrv, \tag{6.5}$$

y reemplazamos en la ecuación para librarnos de la velocidad y despejar el radio de órbita del satélite

$$GM_\mathrm{T} = \frac{L^2}{m^2 r} \Longrightarrow r = \frac{L^2}{Gm^2M_\mathrm{T}}. \tag{6.6}$$

Si no recordamos el valor de la constante G ni la masa terrestre M_T, entonces podemos recordar que la aceleración de gravedad en la superficie es g, por lo que una partícula de masa m' ubicada en el radio de la Tierra siente una fuerza según Newton igual a

$$-G\frac{m'M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}^2} = -m'g \Longrightarrow G = \frac{gR_\mathrm{T}^2}{M_\mathrm{T}}, \tag{6.7}$$

y entonces el radio de órbita es

$$r = \frac{L^2}{R_\mathrm{T}^2 m^2 g}. \tag{6.8}$$

La cuantización de Bohr dice que el momento angular es un número entero n de constantes de Planck reducidas $\hbar = h/2\pi$:

$$L_n = m r_n v_n = n\hbar, \tag{6.9}$$

por lo tanto, el radio cuantizado de la órbita en el nivel n es

$$r_n = \frac{\hbar^2}{R_{\mathrm{T}}^2 m^2 g} n^2. \tag{6.10}$$

Luego, la variación del radio de órbita cuando va de un nivel cuantizado n al próximo, $n+1$, es

$$\Delta r_n = r_{n+1} - r_n = \frac{\hbar^2}{R_{\mathrm{T}}^2 m^2 g}(n+1)^2 - \frac{\hbar^2}{R_{\mathrm{T}}^2 m^2 g} n^2 = \frac{\hbar^2}{R_{\mathrm{T}}^2 m^2 g}(2n+1) \tag{6.11}$$

Notemos que el satélite no puede orbitar dentro de la superficie terrestre, por lo que existe un nivel orbital mínimo n_0 tal que $r_{n_0} \simeq R_{\mathrm{T}}$, y solo podemos observar transiciones por sobre este valor umbral. Este mínimo radio satisface entonces

$$R_{\mathrm{T}} = \frac{\hbar^2}{R_{\mathrm{T}}^2 m^2 g} n_0^2, \tag{6.12}$$

y nos permite despejar

$$n_0 = \frac{\sqrt{R_{\mathrm{T}}^3 m^2 g}}{\hbar} \simeq \frac{\sqrt{(6370\,\mathrm{km})^3 (1\,\mathrm{kg})^2 (10\,\mathrm{m\,s^{-2}})}}{4.1 \times 10^{-15} \times 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J\,s}/2\pi} \approx 4.9 \times 10^{44} \gg 1, \tag{6.13}$$

de modo que la mínima transición permitida es

$$\begin{aligned}\Delta r_{n_0} = \frac{\hbar^2}{R_{\mathrm{T}}^2 m^2 g}(2n_0+1) \approx \frac{2\hbar^2}{R_{\mathrm{T}}^2 m^2 g} n_0 = \frac{2\hbar}{m\sqrt{R_{\mathrm{T}} g}} &\simeq \frac{2 \times 4.1 \times 10^{-15} \times 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J\,s}/2\pi}{1\,\mathrm{kg} \times \sqrt{6370\,\mathrm{km} \times 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} \\ &\approx 2.6 \times 10^{-38}\,\mathrm{m},\end{aligned} \tag{6.14}$$

una distancia extremadamente pequeña que no es observable. (Además, los modelos actuales de la física no nos permiten trabajar adecuadamente con escalas de longitud menores al largo de Planck $l_{\mathrm{P}} \approx 1.6 \times 10^{-35}\,\mathrm{m}$ ya que aparecen efectos de gravedad cuántica.)