2022-3 FI1100-1 Introducción a la Física Moderna
Profesor: Simón Riquelme Muñoz
Auxiliar: Camilo Núñez Barra
Ayudante: Camila Pulgarés Muñoz

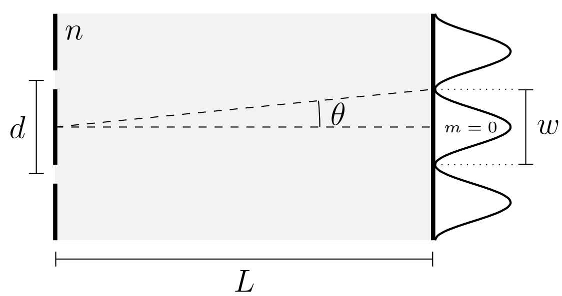
Pauta Auxiliar 7

10 de enero de 2022

P1. [35.35 Sears & Zemansky 14 Ed] Doble rendija en plástico

Una de las caras redondas de un tubo cilíndrico y sólido de plástico de $3.25\,\mathrm{m}$ está cubierta con un recubrimiento delgado negro que bloquea la luz por completo. La cara opuesta está cubierta por un recubrimiento fluorescente que brilla cuando lo toca la luz. En el centro de la cara negra se hacen dos rendijas paralelas, rectas y delgadas, separadas por $0.225\,\mathrm{mm}$. Cuando a través de dichas rendijas pasa luz láser con longitud de onda de $632.8\,\mathrm{nm}$ y perpendicular a la cara negra, se observa que la franja brillante central en la cara opuesta es de $5.82\,\mathrm{mm}$ de ancho, medida entre las bandas oscuras que la limitan a cada lado. ¿Cuál es el índice de refracción del plástico?

La luz que pasa a través de la doble rendija produce un patrón de interferencia en la cara opuesta. El láser emite una longitud de onda $\lambda = 632.8\,\mathrm{nm}$, pero al entrar al tubo la luz viaja a través de un medio distinto al aire, por lo que cambia su longitud de onda a $\lambda_n = \lambda/n$, con n el índice de refracción del medio, que en este caso es plástico.



Las franjas oscuras corresponden a la interferencia destructiva que podemos aproximar en la doble rendija como $d \sin\theta = (m + 1/2)\lambda_n$, ya que $d \sin\theta$ es la diferencia de caminos y el $1/2$ agrega el desfase en media longitud de onda. La separación de las rendijas es un dato, $d = 0.225\,\mathrm{mm}$. La franja brillante central corresponde a $m = 0$ y sabemos que el ancho entre las bandas oscuras que la limitan es $w = 5.82\,\mathrm{mm}$, por lo tanto, la altura de la primera banda oscura es $w/2 = 2.91\,\mathrm{mm}$. Además, el largo del tubo es $L = 3.25\,\mathrm{m}$, por lo tanto, el ángulo θ que forma la primera franja con respecto a la recta perpendicular a la línea de las fuentes satisface la relación trigonométrica $\tan\theta = (w/2)/L$, que nos permite encontrar $\theta = \arctan(2.91 \times 10^{-3}/3.25) = 0.0008954$ en radianes.

Finalmente, despejamos el índice de refracción de la fórmula de interferencia destructiva y concluimos que

$$n = \frac{\lambda}{2d\sin\theta} = \frac{632.8 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}}{2 \times 0.225 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \times \sin(0.0008954)} = 1.57, \tag{1.1}$$

donde pudimos haber hecho la aproximación $\sin\theta \approx \theta$ pues θ es pequeño pero hay que tener cuidado de expresarlo en radianes y no en grados.

P2. [39.70 Sears & Zemansky 14 Ed] Incertidumbre en el fundamental

Suponga que la incertidumbre en la posición de un electrón es igual al radio de la órbita $n = 1$ de Bohr del hidrógeno. Calcule la incertidumbre mínima simultánea de la componente de la cantidad de movimiento correspondiente, y compárela con la magnitud de la cantidad de movimiento para el electrón en la órbita $n = 1$ de Bohr. Analice sus resultados.

Utilizando la condición de cuantización de Bohr $mv_n r_n = n\hbar$, para el nivel $n = 1$ tenemos que la magnitud del momentum lineal es

$$p_1 = mv_1 = \frac{\hbar}{r_1}. \tag{2.1}$$

Por otro lado, el principio de incertidumbre de Heisenberg establece que

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{2.2}$$

Suponiendo que la incertidumbre en la posición Δx del electrón es igual al radio r_1 de la órbita $n = 1$, entonces $\Delta x = r_1$. Tomando la incertidumbre mínima (esto es, tomar la igualdad '=' en la desigualdad '$\geq$'), la incertidumbre mínima simultánea en el momentum lineal es

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{2r_1} \tag{2.3}$$

Sin necesidad de reemplazar numéricamente, podemos concluir que la incertidumbre en el momentum es del mismo orden que la magnitud del momentum (solo difieren en un factor de 2), por lo tanto, este principio de Heisenberg es importante en el átomo de hidrógeno.

P3. [39.74 Sears & Zemansky 14 Ed] Pion neutro

El pion neutro (π^0) es una partícula inestable producida en choques de partículas con alta energía. Su masa aproximada es 264 veces la del electrón, y su duración media es de $8.4 \times 10^{-17}\,\mathrm{s}$ antes de desintegrarse en dos fotones de rayos gamma. Use la relación $E = mc^2$ entre la masa en reposo y la energía, para calcular la incertidumbre en la masa de la partícula, y exprésela como fracción de esa masa.

El principio de incertidumbre de Heisenberg establece que

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{3.1}$$

Consideramos su duración media como $\Delta t = 8.4 \times 10^{-17}\,\mathrm{s}$ y su incertidumbre en energía como $\Delta E = c^2 \Delta m$. Tomando la mínima incertidumbre (la igualdad en el lugar de la desigualdad), entonces podemos despejar la incertidumbre en la masa de la partícula:

$$c^2 \Delta m \Delta t = \frac{\hbar}{2} \Longrightarrow \Delta m = \frac{\hbar}{2c^2 \Delta t} = \frac{6.6 \times 10^{-34}\,\mathrm{J}/2\pi}{2 \times (3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2 \times 8.4 \times 10^{-17}\,\mathrm{s}} = 6.9 \times 10^{-36}\,\mathrm{kg} \tag{3.2}$$

y expresada como una fracción de la masa queda:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta m}{264 m_\mathrm{e}} = \frac{6.9 \times 10^{-36}\,\mathrm{kg}}{264 \times 9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 2.9 \times 10^{-8}, \tag{3.3}$$

que es muy pequeña.

P4. [P2 Ex 2022-2] Efecto fotoeléctrico

Una fuente de luz que emite radiación a frecuencia f_0 es incapaz de expulsar fotoelectrones de cierto metal. En un intento de usar esa fuente para expulsar fotoelectrones del metal, se le da a la fuente una velocidad hacia el metal.

a) **Explique cómo este procedimiento produce fotoelectrones.**

Inicialmente la fuente en reposo es incapaz de excitar los electrones del metal (pues la luz no tendría energía suficiente), pero al darle una velocidad v hacia el metal, el efecto Doppler (no relativista para la luz: $1 + v/c = f_{\text{em}}/f_{\text{obs}}$) incrementa la frecuencia f de los fotones emitidos a frecuencia f_0, por lo que su energía hf aumenta ("blueshift") hasta superar la función trabajo ϕ del metal.

b) **Cuando la velocidad de la fuente de luz es igual a αc, con $\alpha < 1$, los fotoelectrones comienzan a ser expulsados del metal. ¿Cuál es la función trabajo del metal?**

Ya que la fuente se está acercando al metal, consideramos la velocidad relativa como negativa: $v = -\alpha c$, por lo que la frecuencia desplazada por efecto Doppler sería

$$f^* = \frac{f_0}{1 + v/c} = \frac{f_0}{1 - \alpha}, \tag{4.1}$$

que efectivamente corresponde a una frecuencia mayor. Además, como recién a partir de esta velocidad los fotoelectrones comienzan a ser expulsados, significa que f^* corresponde a la frecuencia umbral, que es tal que la energía cinética es nula, $K = 0$, por lo tanto, al considerar el efecto fotoeléctrico $K = hf - \phi$, podemos obtener la función trabajo del metal:

$$\phi = hf^* = \frac{hf_0}{1 - \alpha}. \tag{4.2}$$

c) **Cuando la velocidad de la fuente de luz se duplica, determine la energía cinética máxima de los fotoelectrones.**

Ahora consideramos $v = -2\alpha c$ (e imponemos $\alpha \ll 1/2$ para no adentrarnos a tratamientos relativistas). La energía cinética de los fotoelectrones la podemos obtener directamente de la fórmula del efecto fotoeléctrico y del efecto Doppler:

$$K = hf - \phi = h\frac{f_0}{1 - 2\alpha} - \frac{hf_0}{1 - \alpha} = \frac{\alpha}{(1 - 2\alpha)(1 - \alpha)} hf_0. \tag{4.3}$$

P5. [P1a C1 FI3102-1 2021-2] Ley de potencias

Suponga que la energía potencial de un electrón en un átomo no es Coulombiana, sino que obedece alguna otra ley de potencias con algún exponente conocido. Considere válida la condición de cuantización de Bohr $m_e v_n r_n = n\hbar$, con $\hbar$ una constante y n un entero positivo.

¿Qué radios r_n, velocidades v_n y energías E_n habría encontrado Bohr en 1913?

El potencial eléctrico V en este sistema obedece una ley de potencias

$$V(r) = kr^{\alpha} \tag{5.1}$$

que generaliza la ley de Coulomb ($\alpha = -1$), con k una constante de proporcionalidad positiva. La energía potencial eléctrica U de una partícula de carga q sometida a un potencial eléctrico V es $U = qV$, por lo que para el electrón de carga $q = -e$ tenemos

$$U(r) = (-e)\,V(r) = -ekr^{\alpha}. \tag{5.2}$$

Así, la fuerza F que siente el electrón es

$$F(r) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = \alpha ekr^{\alpha-1} \tag{5.3}$$

Suponiendo que el electrón orbita de manera circular uniforme con aceleración centrípeta

$$a_c = -\frac{v^2}{r} \tag{5.4}$$

y considerando además que tiene una masa m_e, entonces clásicamente satisface la segunda ley de Newton:

$$F = ma \Longrightarrow \alpha ekr^{\alpha-1} = -m_e\frac{v^2}{r} \tag{5.5}$$

Introducimos la magnitud del momento angular $L = m_e vr$ para aplicar la condición de cuantización de Bohr

$$m_e v_n r_n = n\hbar \tag{5.6}$$

en la ecuación anterior:

$$\alpha ekr_n^{\alpha-1} = -\frac{n^2\hbar^2}{m_e r_n^3} \tag{5.7}$$

de donde podemos despejar el radio de órbita cuantizado que habría encontrado Bohr en 1913:

$$r_n = \left(-\frac{n^2\hbar^2}{\alpha ekm_e}\right)^{\frac{1}{\alpha+2}} \tag{5.8}$$

y gracias a la condición de cuantización obtenemos también la velocidad:

$$v_n = \frac{n\hbar}{m_e r_n} = \left(\frac{-\alpha ek(n\hbar)^{\alpha}}{m_e^{\alpha+1}}\right)^{\frac{1}{\alpha+2}}. \tag{5.9}$$

Finalmente, los niveles de energía E_n estarían dados por la suma de la energía potencial eléctrica

$$U_n = -ekr_n^{\alpha} \tag{5.10}$$

y la energía cinética

$$K_n = \frac{1}{2}m_\mathrm{e}v_n^2 = \frac{1}{2}m_\mathrm{e}\left(\frac{-\alpha ek(n\hbar)^\alpha}{m_\mathrm{e}^{\alpha+1}}\right)^{\frac{2}{\alpha+2}} = \frac{1}{2}m_\mathrm{e}\left(\frac{(-)^2\alpha^2e^2k^2(n^2\hbar^2)^\alpha}{m_\mathrm{e}^{\alpha+2}m_\mathrm{e}^\alpha}\left(\frac{\alpha ek}{\alpha ek}\right)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha+2}}$$
$$= \frac{1}{2}m_\mathrm{e}\left(-\frac{\alpha ek}{m_\mathrm{e}}r_n^\alpha\right) = -\frac{1}{2}\alpha ekr_n^\alpha, \tag{5.11}$$

para obtener

$$E_n = K_n+U_n = -\frac{1}{2}\alpha ekr_n^\alpha - ekr_n^\alpha = -\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)ekr_n^\alpha = -\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)ek\left(-\frac{n^2\hbar^2}{\alpha ekm_\mathrm{e}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}. \tag{5.12}$$

Notemos que podemos recuperar los valores conocidos del modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno si tomamos $\alpha = -1$ (para así tener la ley de Coulomb $V(r) = e/4\pi\epsilon_0 r$):

$$r_n = \epsilon_0\frac{nh^2}{\pi m_\mathrm{e}e^2} \tag{5.13}$$

$$v_n = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{e^2}{2nh} \tag{5.14}$$

$$E_n = -\frac{1}{\epsilon_0^2}\frac{m_\mathrm{e}e^4}{8n^2h^2} \tag{5.15}$$

y si además identificamos la constante $k = ek_\mathrm{e}$ como el producto entre la carga del protón y la constante de Coulomb $k_\mathrm{e} = 1/4\pi\epsilon_0$, y la constante $\hbar = h/2\pi$ como la constante de Planck reducida.