



Pauta Auxiliar 8 (P2 sin terminar)

11 de enero de 2022

P1. [P3 C3 2022-2] Mínima energía

Una partícula de masa $m = 10^{-28}$ kg se mueve según el eje x bajo la influencia de una energía potencial dada por $U(x) = v\sqrt{|x|}$, donde $v = 10^{-15}$ J m $^{-1/2}$.

- a) A partir del análisis dimensional del problema, construya un resultado para la mínima energía en función de las únicas constantes físicas del problema: m , v y \hbar . ¿Sería posible hacerlo en el problema análogo clásico?

Utilizamos las siguientes dimensiones del SI: tiempo T, longitud L y masa M. Notemos que energía = ML 2 T $^{-2}$, por lo tanto, las dimensiones de las constantes físicas del problema $m = 10^{-28}$ kg, $v = 10^{-15}$ J m $^{-1/2}$ y $\hbar = 1.054 \times 10^{-34}$ Js son:

$$[m] = \text{masa} = \text{M}, \quad (1.1)$$

$$[v] = \text{energía} \times \text{longitud}^{-1/2} = \text{ML}^{3/2}\text{T}^{-2}, \quad (1.2)$$

$$[\hbar] = \text{energía} \times \text{tiempo} = \text{ML}^2\text{T}^{-1}. \quad (1.3)$$

Si queremos construir la mínima energía E_0 en función de estas tres constantes físicas m , v y \hbar , es decir, $E = E(m, v, \hbar)$, entonces consideramos que existen ciertos exponentes dimensionales respectivos α , β y γ tales que se cumple la proporcionalidad

$$E_0 \sim m^\alpha v^\beta \hbar^\gamma. \quad (1.4)$$

Aplicando el operador dimensional,

$$[E] = [m]^\alpha [v]^\beta [\hbar]^\gamma, \quad (1.5)$$

$$\text{ML}^2\text{T}^{-2} = \text{M}^{\alpha+\beta+\gamma} \text{L}^{3\beta/2+2\gamma} \text{T}^{-2\beta-\gamma}. \quad (1.6)$$

Ahora imponemos la regla de homogeneidad dimensional, es decir, que solamente se puede comparar cantidades con la misma dimensión, lo que en la ecuación anterior se traduce en igualar los exponentes individualmente para cada dimensión:

$$1 \stackrel{\text{M}}{=} \alpha + \beta + \gamma \quad (1.7)$$

$$2 \stackrel{\text{L}}{=} \frac{3}{2}\beta + 2\gamma \quad (1.8)$$

$$-2 \stackrel{\text{T}}{=} -2\beta - \gamma \quad (1.9)$$

Este es un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas sencillo de resolver. Utilizamos la ecuación de T para despejar

$$\gamma = 2 - 2\beta \quad (1.10)$$

y reemplazamos en la ecuación de L para obtener β :

$$2 = \frac{3}{2}\beta + 4 - \beta \implies \beta = \frac{4}{5}. \quad (1.11)$$

Nos devolvemos al despeje anterior para obtener γ :

$$\gamma = \frac{2}{5}. \quad (1.12)$$

Ahora utilizamos la ecuación de M para despejar α :

$$\alpha = -\frac{1}{5}. \quad (1.13)$$

Concluimos entonces que la energía mínima en función de las únicas constantes físicas del problema se puede construir de la forma

$$\begin{aligned} E_0 &\sim \left(\frac{v^4 \hbar^2}{m}\right)^{1/5} = \left(\frac{(10^{-15} \text{ J m}^{-1/2})^4 (1.054 \times 10^{-34} \text{ J s})^2}{10^{-28} \text{ kg}}\right)^{1/5} \\ &= 1.031 \times 10^{-20} \text{ J} = 0.063 \text{ eV}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

El límite clásico corresponde a considerar $\hbar \rightarrow 0$ (porque así el principio de incertidumbre no impone realmente una cota significativa en la incertidumbre: $\Delta x \Delta p \geq 0$). Por lo tanto, la mínima incertidumbre puede ser efectivamente cero y conocer tanto la posición como el momentum de manera exacta, al igual que en mecánica clásica). Si imponemos $\gamma = 0$ en el sistema de ecuaciones para así intentar construir una energía mínima solamente con m y v , entonces no encontramos solución para α y β , por lo que concluimos que no es posible hacer este análisis dimensional en el problema análogo clásico.

- b) **Determine el orden de magnitud de la energía mínima de la partícula según el principio de incertidumbre. Comente con respecto al resultado obtenido en el inciso anterior.**

El principio de incertidumbre de Heisenberg establece que

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (1.15)$$

por lo tanto, la incertidumbre mínima simultánea en el momentum en función de la incertidumbre en la posición es $\Delta p = \hbar/2\Delta x$.

La energía total E de la partícula es la suma de su energía cinética $K = p^2/2m$ y su energía potencial $U(x) = v\sqrt{|x|}$, por lo tanto, en términos de la incertidumbre en la posición, es

$$E(\Delta x) = \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + v\sqrt{\Delta x}. \quad (1.16)$$

La mínima energía E^* ocurre para un cierto Δx^* que la minimiza:

$$\left. \frac{dE}{d(\Delta x)} \right|_{\Delta x = \Delta x^*} = -2 \frac{2\hbar^2}{8m(\Delta x^*)^3} + \frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{\Delta x^*}} \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.17)$$

Esto nos permite despejar esta incertidumbre crítica:

$$2\frac{2\hbar^2}{8m(\Delta x^*)^3} = \frac{1}{2}\frac{v}{\sqrt{\Delta x^*}} \implies (\Delta x^*)^{5/2} = \frac{\hbar^2}{2mv} \implies \Delta x^* = \left(\frac{\hbar^4}{4m^2v^2}\right)^{1/5}. \quad (1.18)$$

Luego, la mínima energía es

$$E^* = E(\Delta x^*) = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{8m^4v^4}{\hbar^8}\right)^{1/5} + v \left(\frac{\hbar^2}{2mv}\right)^{1/5} = \left(\frac{v^4\hbar^2}{m}\right)^{1/5} (2^{-11/5} + 2^{-1/5}). \quad (1.19)$$

Notemos que el factor de constantes físicas corresponde la cantidad E_0 encontrada en el inciso anterior, por lo que ambos resultados son consistentes entre sí. Numéricamente, la energía mínima de la partícula según el principio de incertidumbre es entonces

$$E^* = (2^{-11/5} + 2^{-1/5})E_0 = 1.088 \times 1.031 \times 10^{-20} \text{ J} = 1.11 \times 10^{-20} \text{ J} = 0.069 \text{ eV}. \quad (1.20)$$

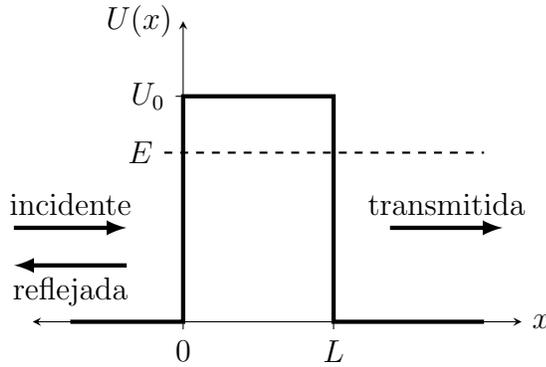
P2. Efecto túnel en barrera de potencial

El efecto túnel o tunelamiento cuántico es un fenómeno en el que una partícula penetra una barrera de energía potencial mayor que la energía de la propia partícula, violando los principios de la mecánica clásica.

Considere una barrera de potencial de altura U_0 y ancho L :

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ U_0 & 0 \leq x \leq L \\ 0 & x > L \end{cases} \quad (2.1)$$

Una partícula cuántica de energía E positiva menor a U_0 y masa m viaja a través del eje x hacia la derecha y se encuentra con esta barrera de potencial. ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se transmita a través de la barrera de potencial?



Demuestre que esta probabilidad de tunelamiento para una barrera ancha y alta se puede aproximar a

$$T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\kappa L}, \quad (2.2)$$

con $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$. Comente su resultado.

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo establece que

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (2.3)$$

donde $\psi(x)$ es la función de onda estacionaria de la partícula. El potencial $U(x)$ está dado por partes, por lo que denotamos la solución por regiones I, II y III:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_{\text{I}}(x) & x < 0 \\ \psi_{\text{II}}(x) & 0 \leq x \leq L \\ \psi_{\text{III}}(x) & x > L \end{cases} \quad (2.4)$$

Así, al reemplazar el potencial y la función de onda, la ecuación se transforma en

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_{\text{I}}(x)}{dx^2} = E\psi_{\text{I}}(x) & x < 0 \quad (2.5) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_{\text{II}}(x)}{dx^2} + U_0\psi_{\text{II}}(x) = E\psi_{\text{II}}(x) & 0 \leq x \leq L \quad (2.6) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_{\text{III}}(x)}{dx^2} = E\psi_{\text{III}}(x) & x > L \quad (2.7) \end{array} \right.$$

que la podemos reescribir como

$$\begin{cases} \frac{d^2\psi_I}{dx^2} = -k^2\psi_I & x < 0 \\ \frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} = \kappa^2\psi_{II} & 0 \leq x \leq L \\ \frac{d^2\psi_{III}}{dx^2} = -k^2\psi_{III} & x > L \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} = \kappa^2\psi_{II} \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.9)$$

$$\frac{d^2\psi_{III}}{dx^2} = -k^2\psi_{III} \quad x > L \quad (2.10)$$

donde hemos definido los números de onda

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \kappa \equiv \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}. \quad (2.11)$$

La solución a la EDO de las regiones I y III la conocemos de MAS y sabemos que tiene la forma oscilatoria $e^{\pm ikx} = \cos(kx) \pm i \sin(kx)$, pero no podemos asumir que ambas tienen la misma amplitud. Por otro lado, podemos corroborar por inspección que la solución a la EDO de la región II tiene forma de decaimiento exponencial $e^{\pm \kappa x}$. Luego, escribimos la solución general como

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ \psi_{II}(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x} & 0 \leq x \leq L \\ \psi_{III}(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} & x > L \end{cases} \quad (2.12)$$

donde las constantes A, B, C, D, F y G pueden ser complejas y debemos determinarlas para encontrar la solución final. La partícula incide en la región I como un paquete de ondas hacia la derecha que se puede reflejar en la barrera hacia la izquierda, por lo tanto, A no es nulo y B tampoco. La onda se puede transmitir a la región III, por lo que F no es nulo, pero en esta región no hay una onda hacia la izquierda ya que la onda transmitida no se puede reflejar, por lo tanto, podemos decir que $G \stackrel{!}{=} 0$. Luego,

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ \psi_{II}(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x} & 0 \leq x \leq L \\ \psi_{III}(x) = Fe^{ikx} & x > L \end{cases} \quad (2.13)$$

La primera condición de borde establece continuidad en ψ . En $x = 0$ entre la región I y II:

$$\psi_I(0) \stackrel{!}{=} \psi_{II}(0) \implies A + B = C + D \quad (2.14)$$

y en $x = L$ entre la región II y III:

$$\psi_{II}(L) \stackrel{!}{=} \psi_{III}(L) \implies Ce^{\kappa L} + De^{-\kappa L} = Fe^{ikL}. \quad (2.15)$$

La segunda condición de borde establece continuidad en $\frac{d\psi}{dx}$. En $x = 0$ entre la región I y II:

$$\left. \frac{d\psi_I}{dx} \right|_{x=0} \stackrel{!}{=} \left. \frac{d\psi_{II}}{dx} \right|_{x=0} \implies ikA - ikB = \kappa C - \kappa D \quad (2.16)$$

y en $x = L$ entre la región II y III:

$$\left. \frac{d\psi_{II}}{dx} \right|_{x=L} \stackrel{!}{=} \left. \frac{d\psi_{III}}{dx} \right|_{x=L} \implies \kappa Ce^{\kappa L} - \kappa De^{-\kappa L} = ikFe^{ikL}. \quad (2.17)$$

La probabilidad de transmisión T o probabilidad de tunelamiento es la razón entre la amplitud de la onda transmitida $\psi_t(x) = Fe^{ikx}$ y la amplitud de la onda incidente $\psi_i(x) = Ae^{ikx}$:

$$T = \frac{|\psi_t|^2}{|\psi_i|^2} = \frac{\overline{\psi_t}\psi_t}{\overline{\psi_i}\psi_i} = \frac{\overline{F}e^{-ikx}Fe^{ikx}}{\overline{A}e^{-ikx}Ae^{ikx}} = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \left|\frac{F}{A}\right|^2, \quad (2.18)$$

y podemos corroborar que se tunela con certeza ($T = 1$) si la amplitud transmitida es igual a la incidente y no se tunela ($T = 0$) si la amplitud transmitida es nula.

Hasta ahora tenemos cinco incógnitas pero solamente cuatro ecuaciones, por lo que no podríamos determinar la solución. Sin embargo, solamente nos interesa encontrar la probabilidad de transmisión que se define en función de la fracción F/A , lo que es una buena noticia porque este sistema sí se puede resolver para las cuatro incógnitas B/A , C/A , D/A y F/A .

Eliminemos B mediante $ik \times (2.14) + (2.16)$:

$$i2kA = (\kappa + ik)C - (\kappa - ik)D. \quad (2.19)$$

Eliminemos C mediante $\kappa \times (2.15) - (2.17)$:

$$2\kappa De^{-\kappa L} = (\kappa - ik)Fe^{ikL}. \quad (2.20)$$

Eliminemos D mediante $\kappa \times (2.15) + (2.17)$:

$$2\kappa Ce^{\kappa L} = (\kappa + ik)Fe^{ikL}. \quad (2.21)$$

Reemplacemos esta última y penúltima ecuación en la antepenúltima:

$$i2kA = \frac{(\kappa + ik)^2 Fe^{ikL}}{2\kappa e^{\kappa L}} - \frac{(\kappa - ik)^2 Fe^{ikL}}{2\kappa e^{-\kappa L}} \quad (2.22)$$

que nos permite despejar

$$\frac{A}{F} = \frac{e^{ikL}}{i4\kappa k} \left((\kappa + ik)^2 e^{-\kappa L} - (\kappa - ik)^2 e^{\kappa L} \right) \quad (2.23)$$

$$= \frac{e^{ikL}}{i4\kappa k} \left((\kappa^2 + i2\kappa k - k^2) e^{-\kappa L} - (\kappa^2 - i2\kappa k - k^2) e^{\kappa L} \right) \quad (2.24)$$

$$= \frac{e^{ikL}}{i4\kappa k} \left(i4\kappa k \frac{e^{\kappa L} + e^{-\kappa L}}{2} - 2(\kappa^2 - k^2) \frac{e^{\kappa L} - e^{-\kappa L}}{2} \right) \quad (2.25)$$

$$= \frac{e^{ikL}}{i4\kappa k} \left(i4\kappa k \cosh(\kappa L) - 2(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa L) \right) \quad (2.26)$$

= ...

... matracas algebraicas pendiente por typear...

$$\frac{1}{T} = \frac{\overline{A}A}{\overline{F}F} = \dots \quad (2.27)$$

y concluimos finalmente que

$$T = \left(1 + \frac{U_0^2 \sinh^2(\kappa L)}{4E(U_0 - E)} \right)^{-1}. \quad (2.28)$$

Consideremos ahora que la barrera es muy ancha ($L \gg 1$) y muy alta ($U_0 \gg 1$). Luego, $\kappa L \gg 1$. Notemos entonces que podemos realizar la siguiente aproximación:

$$\sinh(\kappa L) = \frac{e^{\kappa L} - e^{-\kappa L}}{2} \approx \frac{e^{\kappa L}}{2} \quad (2.29)$$

ya que $e^{-\kappa L}$ es exponencialmente pequeño. Reemplazando,

$$T \approx \left(1 + \frac{U_0^2 e^{2\kappa L}}{16E(U_0 - E)}\right)^{-1} = \left(\frac{16E(U_0 - E) + U_0^2 e^{2\kappa L}}{16E(U_0 - E)}\right)^{-1}, \quad (2.30)$$

y apreciemos ahora que $16E(U_0 - E)$ es grande porque U_0 es grande, pero entonces $U_0^2 e^{2\kappa L}$ es incluso más grande, de modo que el primer término es despreciable, y podemos finalmente concluir la aproximación deseada para la probabilidad de tunelamiento de una barrera ancha y alta:

$$T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\kappa L}, \quad (2.31)$$

es decir, la probabilidad de tunelamiento se vuelve muy débil al aumentar el tamaño de la barrera, decayendo de manera exponencial, pero con una mayor sensibilidad al ancho L que al alto U_0 , ya que $\kappa \sim \sqrt{U_0}$.

PD: Esta página <https://phet.colorado.edu/en/simulations/quantum-tunneling> permite simular de manera interactiva el efecto túnel.