



## Auxiliar 10

20 de enero de 2023

### P1. Longitud de onda del fotón y electrón

Use la relación relativista entre  $E$  y  $p$  para mostrar que electrones y fotones con la misma energía  $E$  tienen distintas longitudes de onda. (Nota: Incluso a energías relativistas la relación de de Broglie  $\lambda = h/p$  es correcta.) Muestre que las longitudes de onda tienden a ser iguales cuando  $E$  es mucho más grande que  $m_e c^2$ .

### P2. [2.6 “A Guide to Physics Problems”] Rapidity

Considere dos transformaciones de Lorentz sucesivas de los sistemas de referencia  $S_0$ ,  $S_1$  y  $S_2$ . El sistema  $S_1$  se mueve paralelo al eje  $x$  de  $S_0$  con velocidad  $v$ , tal como también lo hace  $S_2$  con respecto a  $S_1$ .

- Dado un objeto moviéndose en la dirección  $x$  con velocidad  $v_2$  en  $S_2$ , derive la fórmula para la transformación de su velocidad de  $S_2$  a  $S_0$ .
- Ahora considere  $n + 1$  sistemas moviéndose con la misma velocidad  $v$  relativa el uno con el otro. Derive la fórmula para una transformación de Lorentz de  $S_n$  a  $S_0$ , si la velocidad del objeto en  $S_n$  es también  $v$ .

Hint: Usted podría usar la definición de rapidity  $\tanh \psi = \beta$ , donde  $\beta = v/c$ .

### P3. [P3 C1 FI3102 2021-2] Señales electromagnéticas

Sea un cuerpo estacionario con energía inicial conocida en un sistema  $S$ , en el cual el cuerpo está en reposo. Considere la energía en otro sistema  $S'$ , en movimiento con respecto a  $S$  con una velocidad  $\vec{v} = v\hat{x}$ . Supongamos que el cuerpo emite dos señales electromagnéticas en direcciones  $+\hat{x}$  y  $-\hat{x}$ , cada una con la misma energía  $\epsilon/2$  que asumimos conocida. Considere las energías del cuerpo en  $S$  y  $S'$ , después de la emisión de los fotones.

En este problema queremos deducir la relación entre la energía total del cuerpo y su masa, suponiendo que la Mecánica Galileana es válida en el límite  $v/c \ll 1$ .

- Escriba la conservación de la energía en  $S$  y  $S'$ .
- Considere la energía cinética del cuerpo (i.e. la diferencia entre la energía total y la energía de reposo). Evalúe la diferencia en energía cinética antes y después de la emisión de los fotones (y en el límite  $v/c \ll 1$ ).
- Concluya, siguiendo a Einstein, que “si un cuerpo emite una cantidad de energía  $\epsilon$  en forma de luz, su masa disminuye en  $\epsilon/c^2$ ”.

### P4. [P3 T5 FI3102 2021-2] Efecto Compton

Un fotón de 1 MeV colisiona con un electrón libre y es dispersado por un ángulo de  $90^\circ$ . ¿Cuál es la energía del electrón dispersado y la energía cinética del electrón en retroceso?

**P5. [2.12 “A Guide to Physics Problems”] Positronio y efecto Doppler relativista**

Un electrón  $e^-$  y un positrón,  $e^+$ , cada uno de masa  $m_e$ , unidos con una energía de enlace  $E_b$  en el positronio, se aniquilan creando dos fotones.

- Calcule la energía, momentum, velocidad y frecuencia de los fotones.
- El positronio con velocidad  $\vec{v}$  se aleja del observador en el laboratorio y se aniquila creando un fotón que se aleja y otro que se acerca al observador. Encuentre la frecuencia del fotón medida por el observador y calcule su frecuencia en términos de la frecuencia en el sistema de referencia en reposo del positronio.

**P6. [P4 T5 FI3102 2021-2] Efecto Compton**

Considere una colisión elástica entre un fotón (con momentum  $\vec{p}_0$  y energía  $E_0$ ) y un electrón estacionario.

- Assumiendo que el fotón rebota directamente de vuelta con momentum  $\vec{p}$  (en la dirección de  $-\vec{p}_0$ ) y energía  $E$ , utilice conservación de energía y momentum para encontrar  $p$ .
- Verifique que su respuesta concuerda con la fórmula de Compton,

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) \quad (6.1)$$

con  $\theta = \pi$  el ángulo de scattering,  $h$  la constante de Planck,  $\lambda$  la longitud de onda post scattering,  $\lambda_0$  la longitud de onda previo al scattering,  $m$  la masa en reposo del electrón y  $c$  la velocidad de la luz.

**P7. [P5 T5 FI3102 2021-2] Scattering fotón-electrón**

Considere el scattering de un fotón por un electrón en movimiento. Antes de la colisión, el fotón tiene longitud de onda  $\lambda$  y se mueve en la dirección  $x$  positiva. Por otro lado, el electrón se mueve en la dirección  $x$  negativa con energía total  $E$  (incluyendo su energía en reposo  $mc^2$ ). Después de la colisión, ambos se mueven en la dirección  $x$  negativa (esto es, el fotón ha sido dispersado en un ángulo de  $180^\circ$ ).

- Derive una expresión para la longitud de onda  $\lambda'$  del fotón dispersado. Muestre que si  $E \gg mc^2$ , donde  $m$  es la masa en reposo del electrón, su resultado se reduce a

$$\lambda' = \frac{hc}{E} \left( 1 + \frac{m^2 c^4 \lambda}{4hcE} \right). \quad (7.1)$$

- Un haz de radiación infrarroja de un láser de  $\text{CO}_2$  ( $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$ ) colisiona con un haz de electrones, cada uno de energía total  $E = 10 \text{ GeV}$ . Calcule la longitud de onda  $\lambda'$  de los electrones dispersados, asumiendo un ángulo de scattering de  $180^\circ$ .
- ¿Qué tipo de fotones dispersados son estos? (Infrarrojos, microondas, ultravioletas, etc.)  
¿Puede decir alguna aplicación de este efecto?