Auxiliar 2

Coordenadas esféricas

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi
Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

P1.-

Considere una curva espiral descrita en coordenadas esféricas por las ecuaciones:

$$r = R\,, \quad \phi = N\theta\,,$$

donde R y N son constantes conocidas (N entero par). Una partícula se mueve sobre la espiral partiendo desde el extremo superior ($\theta = 0$) y manteniendo una velocidad angular cenital constante y conocida, $\dot{\theta} = \omega_0$. Se pide:

a) Utilizando coordenadas esféricas, escriba los vectores velocidad y aceleración para una posición arbitraria de la partícula sobre su trayectoria.

b) Determine el valor del radio de curvatura de la trayectoria en el ecuador ($\theta = \pi/2$).

c) Encuentre una expresión para la longitud total de la espiral y para el tiempo que la partícula tarda en recorrerla. **Indicación**: De ser difícil de calcular, puede dejar expresada la integral.

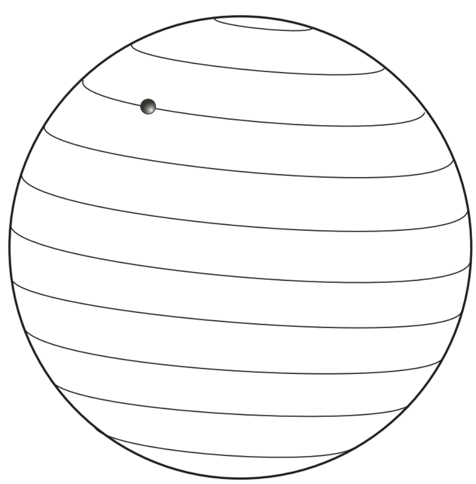

Figura 1: P1

P2.-

Considere una curva espiral cónica descrita en coordenadas esféricas por las ecuaciones:

$$\theta = \pi/4\,, \quad \phi = 2\pi\frac{r}{R}\,,$$

donde R es una constante conocida. Una partícula se mueve sobre la espiral partiendo desde el origen manteniendo una velocidad radial constante y conocida, $\dot{r} = c$. Se pide:

a) Determine la distancia radial del punto P en el cual la rapidez de la partícula es $3c$. Esta será la longitud radial máxima de la espira.

b) Encuentre una expresión para la longitud total de la espiral y para el tiempo que la partícula tarda en recorrerla. **Nota**: Está bien si deja su solución en términos de una integral muy complicada.

c) Determine el valor del radio de curvatura de la trayectoria en el punto P.

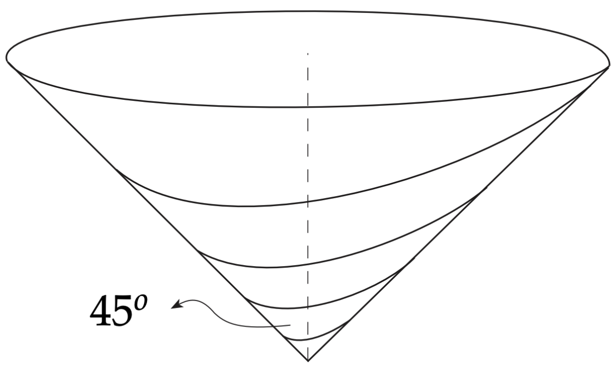

Figura 2: P2

Formulario

Coordenadas esféricas

La posición, velocidad y aceleración en coordenadas esféricas están dados por:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\phi}\\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathrm{d}(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta)}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}\end{aligned}$$