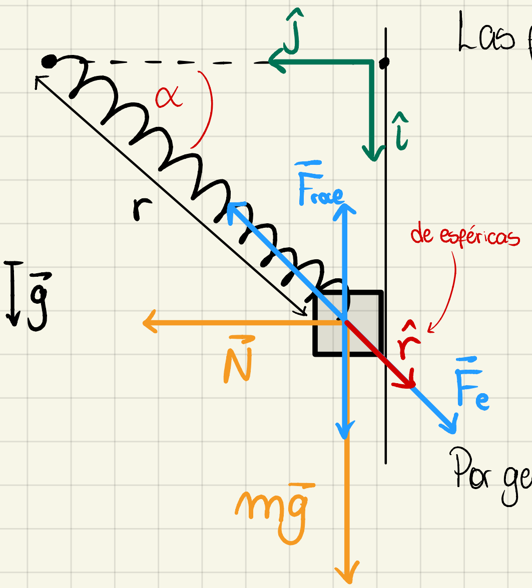
Auxiliar 11

P1

Mientras la masa no se despegue de la pared, esta se moverá solo en una dirección, por lo que usaremo coord cartesianas



Las fuerzas involucradas son

* El sentido de las fuerzas en azul dependen de la posición de la partícula. Lo que no cambia es la dirección

▹ Normal: $\vec{N} = N\hat{j}$

▹ Peso: $\vec{P} = mg\hat{\imath}$

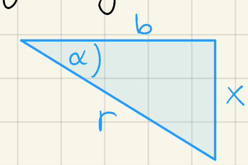
la distancia de O a la partícula

▹ Fuerza resorte: $\vec{F}_R = -k(r-l_0)\sin\alpha\,\hat{\imath} + k(r-l_0)\cos\alpha\,\hat{j}$ * Ver apéndice para saber cómo se llegó a esto

▹ Roce estático: $\vec{F}_{roce} = F_{roce}\,\hat{\imath}$

Por geometría $r^2 = b^2 + x^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+b^2}$ y el ángulo α está dado por

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{x}{b}$$



Como la aceleración es $\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{k}$, la Segunda Ley de Newton nos queda

$$m\ddot{x}\hat{\imath} + \cancel{m\ddot{y}}^{\,0}\hat{j} = N\hat{j} + mg\hat{\imath} - k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\sin\alpha\,\hat{\imath} + k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\cos\alpha\,\hat{j} + F_{roce}\,\hat{\imath}$$

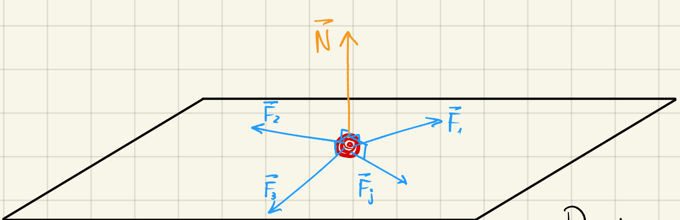
$$\hat{\imath})\quad m\ddot{x} = mg - k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\sin\alpha + F_{roce}$$

$$\hat{j})\quad 0 = N + k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\cos\alpha \Rightarrow N = -k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\cos\alpha \qquad (1)$$

Ahora, la fuerza F_{roce} varía según las otras fuerzas (o sus componentes) en su misma dirección, eje x. Si un objeto no se mueve debido a una fuerza de roce estático, se cumple la desigualdad

$$\left|\sum_i F_i\right| < \mu |N|$$

donde F_i son todas las fuerzas sobre la partícula actuando en el plano perpendicular a la normal (ver dibujo)



En este caso, las fuerzas F_i serían

$$\sum_i F_i = mg - k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\sin\alpha \quad \Big\}\text{ las que van en } \hat{\imath}$$

Por lo que la condición de no movimiento se tiene ssi

$$\left|mg - k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\sin\alpha\right| < \mu|N|$$

$$\Rightarrow \left|mg - k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\sin\alpha\right| < \mu\left|-k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\cos\alpha\right|$$

Pero a nosotros nos interesa el valor justo de μ t.q. la masa se comienze a mover, por lo que tomamos la igualdad y evaluamos en $x=0 \Rightarrow \alpha = 0$

pasa de $<$ a $=$

$$\Rightarrow |mg - k(b-l_0)\sin\alpha| = \mu|-k(b-l_0)|$$

$l_0 = 2b$ por enunciado

$$\Leftrightarrow mg = \mu k b$$

$k = \frac{2mg}{b}$ por enunciado

$$\Leftrightarrow mg = 2mg\mu$$

$$\Leftrightarrow \mu = \frac{1}{2}$$

b) Por (1) tenemos que $N = -k(\sqrt{x^2+b^2} - l_0)\cos\alpha$

$$= -\frac{2mg}{b}\left(b\sqrt{(x/b)^2+1} - 2b\right)\cos\alpha$$

$$= -2mg\left(\sqrt{(x/b)^2+1} - 2\right)\cos\alpha$$

y por geometría tenemos que $\frac{x}{b} = \tan\alpha$

$$\Rightarrow N = -2mg\left(\sqrt{\tan^2\alpha + 1} - 2\right)\cos\alpha$$

$$= -2mg\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 2\right)\cos\alpha$$ (todo en función de α)

Para imponer que la partícula se separa, hacemos $N(\alpha^*) \overset{!}{=} 0$, tenemos dos opciones:

$\frac{1}{\cos\alpha^*} - 2 = 0$	$\cos\alpha^* = 0$
$\Leftrightarrow \cos\alpha^* = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \alpha^* = \pi/3$	$\Rightarrow \alpha^* = \pi/2$

$\therefore$ Se despega para $\alpha^* = \pi/3$ al ser más chico que $\pi/2$

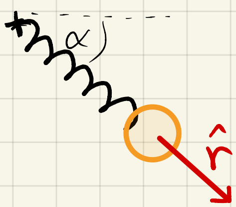
Apéndice: Descomponer la fuerza elástica

Olvidémonos por un momento que está la pared y la gravedad, esto para enfocarnos solo en la fuerza elástica.

Como la fuerza que ejerce un resorte está contenida completamente en la dirección del resorte, ocupamos esféricas y la fuerza elástica estaría dada por

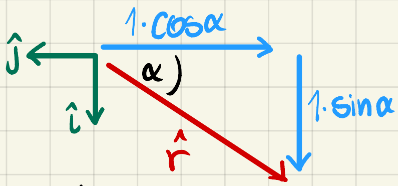
$$\vec{F}_e = -k(r - l_0)\hat{r} \quad (1)$$

(piensen en el caso 1D)



Esta expresión siempre es válida cuando tengamos una partícula atada solo a un resorte.
Ahora, deseamos expresar esta fuerza en cartesianas (ya que ocupamos cartesianas en la pregunta) por lo que basta descomponer el vector unitario $\hat{r}$ en función de $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$

Entonces, por el dibujo de la derecha vamos a tener que $\hat{r}$ está dado por



$$\hat{r} = \sin\alpha\,\hat{\imath} - \cos\alpha\,\hat{\jmath} \quad (2)$$

donde el módulo de $\hat{r}$ es $|\hat{r}| = 1$ al ser unitario (este es el 1 que está multiplicando al $\sin\alpha$ y al $\cos\alpha$) y los signos se los doy según cómo definí mi $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

Entonces, al reemplazar en (1) nos queda

$$\vec{F}_e = -k(r - l_0)\underbrace{(\sin\alpha\,\hat{\imath} - \cos\alpha\,\hat{\jmath})}_{(2)} = -k(r - l_0)\sin\alpha\,\hat{\imath} + k(r - l_0)\cos\alpha\,\hat{\jmath}$$

Esta expresión es válida $\forall r$, el cambio de sentido de la fuerza te lo da automáticamente la diferencia $r - l_0$

* Ojo: Con no reemplazar con las "fórmulas" para descomponer $\hat{r}$ en $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$, ya que esas fórmulas dependen de dónde se definió el ángulo. Así que hagan la descomposición a mano como mostré aquí.

P2

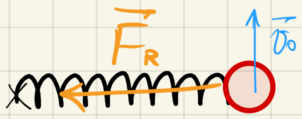


Fig 1: Vista de arriba

Tenemos 3 fuerzas

- Elástica: $\vec{F}_R = -k(\rho - l_0)\hat{\rho}$
- Peso: $\vec{P} = -mg\hat{k}$
- Normal: $\vec{N} = N\hat{k}$

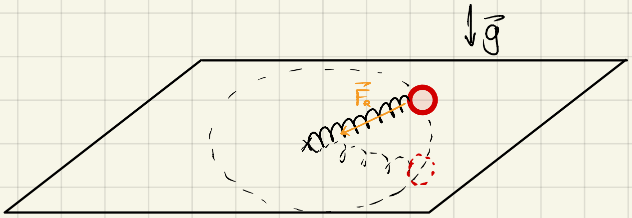


Fig 2: Vista de lado

Ocupamos cilíndricas

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\hat{\phi} + \cancel{\ddot{z}}^{\,0}\hat{k}$$

donde $z = 0 = cte \Rightarrow \dot{z} = \ddot{z} = 0$. Segunda Ley de Newton queda como

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + \frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\hat{\phi} = -k(\rho - l_0)\hat{\rho} - mg\hat{k} + N\hat{k}$$

$\hat{\rho}$) $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -k(\rho - l_0)$

$\hat{\phi}$) $\frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = 0$

$\hat{k}$) $0 = -mg + N$

No podemos integrar $\hat{\rho}$), por lo que ocupamos $\hat{\phi}$)

$\hat{\phi}$: $\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = 0 \Rightarrow \rho^2 \cdot \dot{\phi} = cte$, en particular igual a la condición inicial

$$\Rightarrow \rho^2\dot{\phi} = \rho_0^2\dot{\phi}_0 = \rho_0 \cdot (\rho_0\dot{\phi}_0) \quad (1)$$

donde notamos que este término aparece en la velocidad inicial

$$\vec{v}(t=0) = \cancel{\dot{\rho}_0}^{\,0}\hat{\rho} + \rho_0\dot{\phi}_0\hat{\phi} = \vec{v}_0 = \underbrace{v_0\hat{\phi}}_{\text{por enunciado}}$$

$$\Rightarrow \rho_0\dot{\phi}_0 = v_0$$

y por enunciado $\rho_0 = l_0$, así que (1) queda como

$$\rho^2\dot{\phi} = l_0 \cdot v_0 \Leftrightarrow \dot{\phi} = \frac{l_0 v_0}{\rho^2}$$, reemplazando en $\hat{\rho}$)

$\hat{\rho}$) $\Rightarrow m\ddot{\rho} - m\rho\frac{l_0^2 v_0^2}{\rho^4} = -k(\rho - l_0)$

$$\Leftrightarrow \ddot{\rho} = \frac{l_0^2 v_0^2}{\rho^3} - \frac{k}{m}\rho + \frac{k l_0}{m} \quad (2)$$

ahora si podemos integrar con truco de mecánica

$$(2): \int_0^{\dot{\rho}} \dot{\rho}\, d\dot{\rho} = l_0^2 v_0^2 \int_{l_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^3} - \frac{k}{m}\int_{l_0}^{\rho} \rho\, d\rho + \frac{k l_0}{m}\int_{l_0}^{\rho} d\rho \quad , \quad \rho(t=0) = l_0 \wedge \dot{\rho}(t=0) = 0$$

por enunciado

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\rho}^2}{2} = -\frac{l_0^2 v_0^2}{2}\frac{1}{\rho^2}\Big|_{l_0}^{\rho} - \frac{k}{m}\frac{\rho^2}{2}\Big|_{l_0}^{\rho} + \frac{k l_0}{m}\rho\Big|_{l_0}^{\rho}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\rho}^2}{2} = -\frac{l_0^2 v_0^2}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{l_0^2}\right) - \frac{k}{2m}\left(\rho^2 - l_0^2\right) + \frac{k l_0}{m}\left(\rho - l_0\right) \quad (3)$$

Ahora, queremos imponer que la longitud máxima sea $4l_0$, como queremos maximizar ρ debemos imponer que su derivada sea 0, o sea usamos (3) t.q. $\dot{\rho}(\rho = 4l_0) \overset{!}{=} 0$

$$(3) \Rightarrow 0 = -\frac{l_0^2 v_0^2}{2}\left(\frac{1}{16 l_0^2} - \frac{1}{l_0^2}\right) - \frac{k}{2m}\left(16 l_0^2 - l_0^2\right) + \frac{k l_0}{m}\left(4 l_0 - l_0\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_0^2 l_0^2}{2} \cdot \frac{-15}{16 l_0^2} = -\frac{k}{2m} 15 l_0^2 + \frac{k l_0}{m} 3 l_0$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{16 l_0^2 k}{m} - \frac{32 l_0^2 k}{5m}}$$

$$= \sqrt{\frac{58 l_0^2 k}{5}} \quad \text{creo}$$

b) Pueden hacerlo con conservación de la energía mecánica