Otoño 2020
valentina Suárez

MECÁNICA

resumen y tips pa sobrevivir al exámen

TEMARIO

cinemática

- Coordenas Polares y cilínaricas
- coordenadas Esféricas
- coordenadas Intrínsecas

dinámica

- DCL's, newton y asociados
- Torque y momentum angular

energía

- Energía mecánica
- Fuerzas conservativas
- Potenciales y puntos de equilibrio

oscilaciones

- Oscilaciones amortiguadas
- oscilaciones forzadas
- oscilaciones acopladas
- Frecuencias de oscilación
- Modos normales

snri (mucho texto)

- Todo lo anterior pero en sistémas que se mueven ö
- Fuerzas ficticias:
  - Centrifuga
  - coriolis
  - Transversal

solido rígido

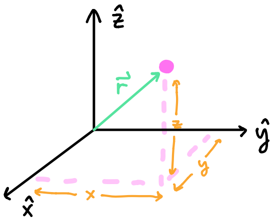
- sistémas continuos y discretos:
  - → centro de masa
- Matrices de inercia:
  - → Teorema de steiner y aditividad.

Cinemática

USO DE COORDENADAS

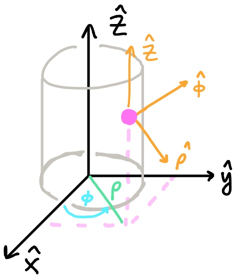
El objetivo de usar distintas coordenadas es establecer sistemas que nos faciliten la descripción del movimiento del objeto y nos ahorren matraca

coordenadas cartesianas son las típicas de toda la vida. $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ son vectores constantes, es decir que en cualquier lugar y tiempo valen lo mismo. NO SE DERIVAN



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$
$$\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$$
$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$$

coordenadas cilíndricas para estas coordenadas se definen 2 nuevos vectores unitarios, en función del ángulo que forma la proyección del cuerpo con el eje x: ϕ



Los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ se definen así:

$$\hat{\rho} = \cos(\phi)\hat{x} + \text{sen}(\phi)\hat{y}$$
$$\hat{\phi} = -\text{sen}(\phi)\hat{x} + \cos(\phi)\hat{y}$$

No son constantes! se van "moviendo" con el cuerpo en función de ϕ.

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$
$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$$
$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$$

- las coordenadas polares son lo mismo que las cilíndricas pero sin movimiento en $\hat{z}$. O sea el movimiento es en un plano. En términos de ecuaciones es lo mismo pero quitando los términos de $\hat{z}$.

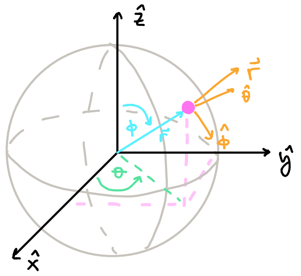
TIP

Para visualizar mejor como funcionan las coordenadas en el espacio, visitar la página

dynref.engr.illinois.edu/ref.html

Ahí se puede seleccionar "Cylindrical coordinates" o "Spherical coordinates" y jugar con los parámetros en "3D". Muy recomendado.

Coordenadas Esféricas Nuevamente se definen vectores unitarios no constantes.



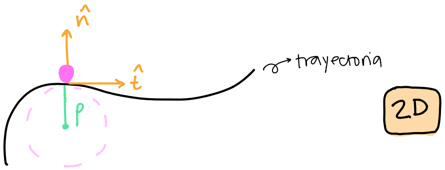
Los vectores $\vec{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$ se definen así:

$$\hat{r} = \text{sen}\theta\cos\phi\,\hat{x} + \text{sen}\theta\,\text{sen}\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$$
$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\,\text{sen}\phi\,\hat{y} - \text{sen}\theta\,\hat{z}$$
$$\hat{\phi} = -\text{sen}\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$$

y las ecuaciones están dadas por:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\,\text{sen}\theta\,\hat{\phi}$$
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\text{sen}^2\theta)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\,\text{sen}\theta\cos\theta)\hat{\theta}$$
$$+ (2\dot{r}\dot{\phi}\,\text{sen}\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\,\text{sen}\theta)\hat{\phi}$$

coordenadas intrínsecas la idea de estas coordenadas es parametrizar la curva de la trayectoria sin necesidad de vectores externos.



- vector tangente ($\hat{t}$): va tangente al punto de la trayectoria donde se encuentra.
- vector normal ($\hat{n}$): va perpendicular al vector tangente.

la velocidad siempre va tangente a la trayectoria con esto las ecuaciones están dadas por

$$\vec{v} = v\hat{t}$$
$$\vec{a} = \dot{v}\hat{t} + v\dot{\hat{t}} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n}$$

ρ → radio de curvatura.

A diferencia de las otras coordenadas, estas ecuaciones no siempre se usan estrictamente. A veces conviene mas sacar $\vec{a}$ derivando el vector tangente usando la geometría del problema.

⚠ Generalmente se usan estas coordenadas cuando conocemos la trayectoria de la partícula.

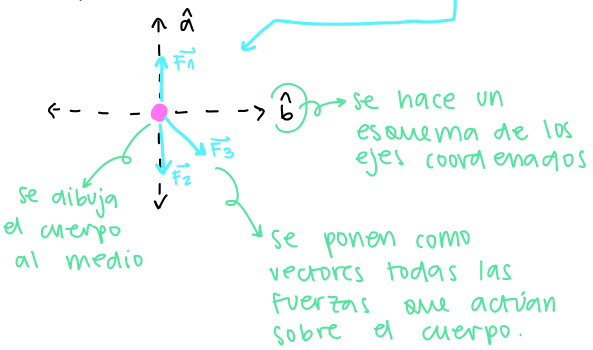
↳ Ejemplo: "Una partícula se mueve por la elipse de ecuación ..."

Dinámica

Para resolver un problema de dinámica, lo primero es elegir un sistema coordenado. Puede ser cualquiera!

El objetivo será encontrar las ecuaciones de movimiento y resolverlas según lo pedido.

Para esto primero se hace un DCL



Fuerzas que pueden aparecer:

- Peso: siempre está si hay gravedad!
  ↳ $\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$
- Normal: se produce por el contacto con superficies
- Elástica: La hacen los elásticos
  ↳ $\boxed{\vec{F_E} = -k(d-l_0)}$
- Tensión: La producen las cuerdas
- Roce: El problema tiene que especificar si hay o no.
  - * Condición para roce cinético:
    $\boxed{F_r < \mu_c N}$ (Para que se mueva en una superficie)
  - * Roce viscoso (En fluidos):
    $\boxed{\vec{F_r} = -c\vec{v}}$
- Fuerzas Externas

¡¡no son todas!!

Luego de tener claro cuáles fuerzas actúan sobre el cuerpo podemos escribir la sumatoria de fuerzas por cada eje.

Las fuerzas en las que su dirección no coincida con uno de los ejes se tienen que descomponer con geometría.

El siguiente paso es calcular la aceleración con las formulas de cinemática del sistema coordenado escogido.

Luego aplicamos la 2da Ley de Newton

$$\boxed{\sum \vec{F} = m \cdot a}$$

lo separamos por ejes y esa serían nuestras ecuaciones de movimiento!

Tips y trucos para las ecs. de mov.

Notar que:

- **Si estamos trabajando en cilíndricas:**
  $\dot{\phi}$ es la velocidad angular
- **Si estamos trabajando en esféricas:**
  $\dot{\theta}$ es la velocidad angular y $\dot{\phi}$ la azimutal.

A veces estos ángulos son constantes y las derivadas se anulan! Esto hace todo más simple.

Generalmente en alguna ecuación nos quedará una EDO. Un buen truco para resolverla:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \dot{x}$$

→ viene de la regla de la cadena.

Con este truco es más fácil separar las variables para resolver las EDO.

OJO!! cuando integramos hay que poner los límites de integración correctos según los datos del problema.

CUANDO LAS COSAS GIRAN

En estos casos tenemos elementos adicionales asociados a la rotación. NO nos entregan info adicional, pero puede ser un camino más rápido.

→ Momentum angular:

$$\boxed{\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

$\vec{p}$ ↳ momentum lineal: $m\vec{v}$

→ Torque:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

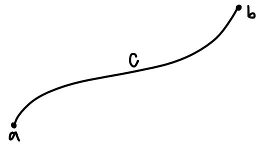
Otra forma de llegar a las ecuaciones de mov. es con la ecuación de torque.

$$\boxed{\dot{\vec{l}} = \vec{\tau}}$$

Energía

TRABAJO

El trabajo que realiza una fuerza $\vec{F}$ sobre un cuerpo que se desplaza desde a hasta b es:



$$\boxed{W_{a\to b} = \int_{a\,(c)}^{b} \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

→ esto es el diferencial

→ Esto indica que la parametrización de la curva c se evalúa en la función de la fuerza F.

El trabajo depende del camino recorrido

En teoría es como la "variación de Energía" por lo que se mide en Joules [J].

La energía cinética (K) de un cuerpo de masa m se define como:

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

* La energía cinética es puntual, osea se mide en un punto específico del movimiento.

Así el trabajo también se puede escribir como

$$\boxed{W_{a\to b} = K_b - K_a}$$

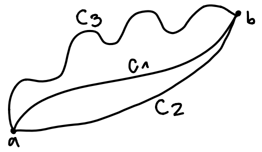
⚠ si no hay desplazamiento NO hay trabajo.

Potencia la potencia se define como la variación del trabajo en el tiempo:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

SISTEMAS CONSERVATIVOS

Una fuerza es conservativa si conservan la energía mecánica de un sistema, y si el trabajo que realiza no depende del camino escogido, solo de la distancia



si la fuerza es conservativa la integral de trabajo de los 3 caminos será la misma.

Energía Mecánica Está definida por:

$$E_m = K + U$$

Hay 3 formas equivalentes para demostrar que una fuerza es conservativa.

① Potenciales <=> ② Integral de trabajo <=> ③ Rotor

① Potencial una fuerza es conservativa si y solo si se puede escribir como el gradiente de un potencial:

$$\exists\ U(x) \text{ tal que } \vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

↳ ojo! El gradiente depende del sistema de coordenadas en que estamos trabajando.

¿Como encontrar un potencial?

se escribe la ecuación vectorialmente y se resuelve por eje coordenado. Por ejemplo, si estuvieramos en cartesianas:

$$\vec{F} = -\nabla U(x) \iff \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$$

⚠ El operador $\vec{\nabla}$ (nabla) depende del sistema coordenado

BUSCAR EN GOOGLE "GRADIENTE EN COORDENADAS..."

Y USAR ESA FORMULA PARA LA PARTE DERECHA.

Tambien hay que tener cuidado con que como estamos trabajando con derivadas parciales, lo que es constante para una ecuación puede no serlo para otra.

Este método funciona SOLO si el potencial existe. Si no existe (no es conservativa) no se llega a nada.

→ usar solo en ejercicios del tipo "demuestre que F es conservativa", "encuentre el potencial de F"

- Potenciales Conocidos/Típicos:
  - → Gravitacional ($\vec{P}$): mgh (situaciones cotidianas en la tierra)
  - → Gravitacional entre 2 cuerpos: $-G\frac{m_1 m_2}{r}$
  - → Elástico ($\vec{F_e}$): $\frac{1}{2}k(d-\ell_0)^2$

se puede afirmar por ejemplo, que si en un ejercicio sobre un cuerpo SOLO actúan el peso y una fuerza elástica (ambas conservativas) el potencial es

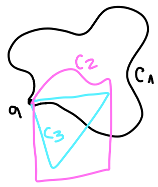
$$U = m g \underbrace{h} + \frac{1}{2}k(\underbrace{d-\ell_0})^2$$

→ Expresar esto en distancias conocidas!!

② Integral de trabajo Una fuerza es conservativa si y solo si

$$\oint_{(c)} \vec{F}(x)\, d\vec{\ell} = 0$$

Esto es que la integral de trabajo sobre un camino cerrado sea nula.



Como la integral de trabajo no depende del camino, sino de la distancia (para fzas conservativas), en un camino cerrado siempre será 0.

③ Rotor Una fuerza $\vec{F}$ es conservativa si y sólo si su rotor es 0:

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{F}}_{\text{Esta cosa depende del sistema de coordenadas.}} = 0$$

Esta es la forma más fácil (a mi gusto). Hay que buscar en google "rotor en coordenadas..." y aplicar esa fórmula al ejercicio. Si da 0 es conservativa!

Nabla ($\vec{\nabla}$) según coordenadas:

→ Cartesianas

- Gradiente:

$$\vec{\nabla} \overset{\text{Escalar}}{a} = \frac{\partial A}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial A}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial A}{\partial z}\hat{z}$$

- Divergencia:

$$\nabla \underset{\text{vector}}{\vec{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Rotor:

$$\vec{\nabla} \times A = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

→ Cilíndricas

- Gradiente:

$$\nabla \overset{\text{escalar}}{a} = \frac{\partial a}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial a}{\partial z}\hat{z}$$

- Divergencia:

$$\nabla \underset{\text{vector}}{\vec{A}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- Rotor:

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{z}$$

→ Esféricas

- Gradiente:

$$\nabla \overset{\text{escalar}}{a} = \frac{\partial a}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial a}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

- Divergencia

$$\nabla \overset{\text{vector}}{\vec{A}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial(\text{sen}\theta\, A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial(A_\phi)}{\partial \phi}$$

- Rotor

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\left(\frac{\partial(A_\phi \text{sen}\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial r A_\phi}{\partial r}\right)\hat{\theta}$$

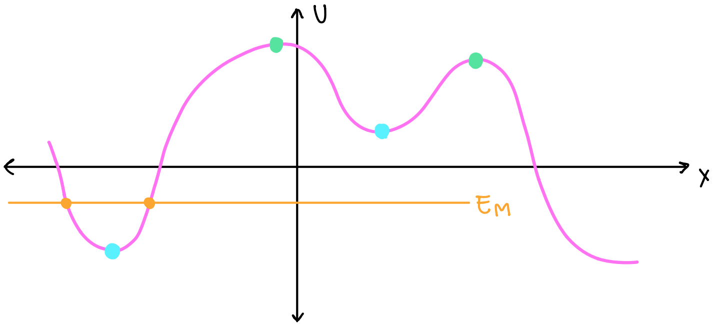
$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{\phi}$$

PUNTOS DE EQUILIBRIO

Al buscar los puntos de equilibrio podemos hacerlo estudiando los potenciales de las fuerzas

x_0 es punto de equilibrio $\iff$ $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x_0} = 0$

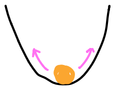
Lo que nos dicen los puntos de equilibrio son los máximos y mínimos del potencial.



Equilibrios Estables serían los puntos azules

x_0 equilibrio estable $\iff$ $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_0} > 0$

Si perturbamos el cuerpo desde un equilibrio estable, va a oscilar en torno a el

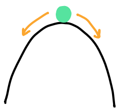


- Puntos de retorno: serían los puntos naranjos. Es donde la energía mecánica se iguala al potencial, osea donde $\vec{v} = 0$ ($v = 0$). Son los puntos donde el cuerpo "se devuelve" en las oscilaciones.

Equilibrios Inestables serían los puntos verdes

x_0 equilibrio inestable $\iff$ $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_0} < 0$

Si perturbamos el cuerpo desde un equilibrio inestable se va a "caer" del equilibrio.



Oscilaciones

En general, queremos trabajar con potenciales en ves de fuerzas por que al ser escalares son más faciles de trabajar.

si le hacemos Taylor al potencial en torno al punto de equilibrio obtenemos

$$U(x) \approx U(x_{eq}) + \cancel{\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x_{eq}}}^{0} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_{x_{eq}}}_{\text{constante}}(x - x_{eq})^2$$

Así, si la fuerza es conservativa podemos escribir la ecuación de movimiento como:

Esta x es la dirección del movimiento, puede ser $\ddot{y}$, $\ddot{\theta}$, etc

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_{x_{eq}}(x - x_{eq}) = 0}$$

ECUACION DE UN OSCILADOR

y la frecuencia de las oscilaciones es

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_{x_{eq}}}$$

¿Pero qué pasa si la fuerza no es conservativa o queremos hacerlo con dinámica?

se puede hacer lo mismo con las fuerzas. hacerles Taylor y aplicar $m\ddot{x} = F$, pero hay que tener mucho ojo con las coordenadas.

OSCILADOR FORZADO

se puede dar que a un cuerpo en un punto de equilibrio estable se le aplique una fuerza externa. Esto se llama forzamiento.

para estos casos la ecuación de movimiento sería.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}(x - x_{eq}) - F_e = 0$$

Esta fuerza puede ser constante o no

Donde

$$\boxed{k = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_{x_{eq}}}$$

La resolución de estos problemas es más compleja y va a depender de cada caso, pero en general hay que utilizar técnicas de EDO.

la frecuencia igualmente es $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_{x_{eq}}$

OSCILADOR AMORTIGUADO

En algunas situaciones puede haber algo que amortigue las oscilaciones (como por ejemplo roce) y que hace la energía del sistema vaya disminuyendo.

Estos sistemas están dados por la ecuación

$$\ddot{x} + b\dot{x} + k(x - x_{eq}) = 0$$

coeficiente que mide el amortiguamiento.

se pueden dar 3 casos de amortiguamiento.

(ver resumenes de EDO pa ver de donde sale)

Sobreamortiguamiento

si $b^2 - 4km > 0$

la solución es este caso es un movimiento dado por la ecuación

$$y = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

constantes que dependen de las condiciones iniciales

con $\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}$ $\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}$

Amortiguamiento Crítico

si $b^2 = 4km$

la solución es este caso es un movimiento dado por la ecuación

$$y = A_1 e^{\frac{-b}{2m}t} + A_2 e^{\frac{-b}{2m}t}$$

constantes que dependen de las condiciones iniciales

Amortiguamiento subcrítico

si $b^2 - 4km < 0$

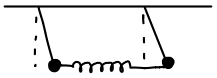
la solución es un movimiento dado por la ecuación:

$$y = A e^{\frac{-b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$$

constantes que dependen de las condiciones iniciales.

Aquí la frecuencia es $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2}$

OSCILADORES ACOPLADOS



son sistémas en los que la oscilación de las masas dependen de las otras masas. En general, masas conectadas con resortes.

las soluciones son muy complejas por lo que queremos encontrar las frecuencias naturales y los modos de oscilación.

para hacer esto encontramos las ecuaciones de movimiento de todas las masas, del estilo $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, pero estas ecuaciones en general quedan dependiendo de la posición de las otras masas.

Se arma un sistéma matricial del estilo

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{matriz} \\ n \times n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

cada fila representará la ecuación de cada masa. ojo con la multiplicación de matriz-vector.

Esta matriz es diagonizable.

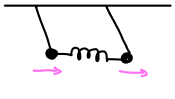
- los valores propios de la matriz serán las frecuencias de oscilación
- los vectores propios de la matriz serán los modos normales de oscilación

¿Cómo interpretar esto?

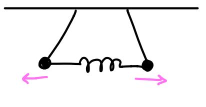
Si los vectores propios tienen componente de igual signo, las masas se mueven para el mismo lado. Si no, para lados contrarios.

por ej:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$



$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow$



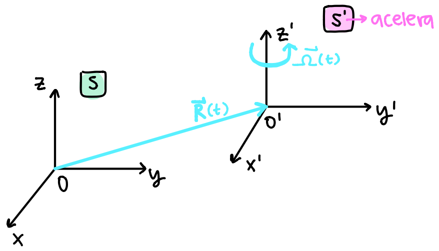
Srni : SISTÉMAS DE REFERENCIA NO INERCIALES

¿Qué es un sistéma de referencia no inercial?

No importa las coordenadas en las que se trabaje, un sistéma de referencia está descrito por su origen O y sus ejes cartesianos. Si estos están acelerando, es un srni.

La idea de estos problemas es describir la dinámica de partículas respecto a observadores que aceleran.

Para resolver los probemas debemos establecer un sistema fijo a parte del no inercial



Para resolver todo necesitamos definir 2 vectores:

- $\vec{R}(t)$: describe la posición de O' con respecto a O.
- $\vec{\Omega}(t)$: Es la velocidad angular de S' con respecto a S.

Con esto en cuenta las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$\underset{\text{con respecto a S'}}{m\vec{a}} = \underset{\text{Sumatoria de fuerzas}}{\vec{F}} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\underset{\text{con respecto a S'}}{\vec{r}'}) - 2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}} - m\dot{\vec{\Omega}}\times\underset{\text{con respecto a S'}}{\vec{r}'}$$

¿Pero que son todos estos términos? ö

Son "fuerzas fictiaias" que se producen por esta aceleración.

→ fuerza centrifuga: $-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')$

→ fuerza de coriolis: $-2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}} - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'$

→ fuerza transversal: $-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'$ (si la velocidad angular es constante esta fuerza es 0)

Afortunadamente, hay una serie de pasos a seguir para encontrar la ecuación de movimiento que funciona bastante bien ü

① Identificar los origenes O y O'

② Elegir un sistéma de coordenadas para cada sistéma. pueden ser el mismo o distintos.

↳ Si se usa el mismo para ambos, cuidado con la notación para no confundirse! usar "'", por ej $\hat{x}$ y $\hat{x}'$

↳ Calculamos $\vec{r}'$; $\dot{\vec{r}}'$ y $\ddot{\vec{r}}'$

③ Identificar $\vec{R}$ y $\vec{\Omega}$

④ Ligar los sistémas coordenados. Escribir los vectores base de $\boxed{S}$ en términos de $\boxed{S'}$

↳ Es más fácil de ver si se hace un dibujo de los vectores. Usar geometría y trigonometría!

⑤ Calcular las fuerzas ficticias.

⚠ Para estos calculos es probable que queden productos cruces entre vectores de distintos sistémas. ESTO NO SE PUEDE HACER! Usar el paso ④ para escribir todo en términos de S'.

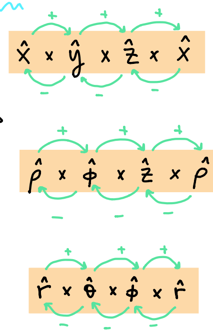
⑥ Calcular $\vec{a}$ y $\vec{F}$ en términos de $\boxed{S'}$

⑦ Escribir la ecuacion de movimiento.

↳ Ya tenemos todo listo para esto! solo hay que usar la "fórmula"

⑧ Resolver el problema: Esto va a depender de qué nos pidan en el ejercicio, pero hay que usar las mismas técnicas que en dinámica

♥ Producto cruz entre vectores base ♥



cartesianas: $\hat{x} \times \hat{y} \times \hat{z} \times \hat{x}$

cilíndricas: $\hat{\rho} \times \hat{\phi} \times \hat{z} \times \hat{\rho}$

Esféricas: $\hat{r} \times \hat{\theta} \times \hat{\phi} \times \hat{r}$

Usando este esquema se pueden calcular los productos.

Si va hacia la derecha, el resultado es el de la derecha y positivo. sino, al revés.

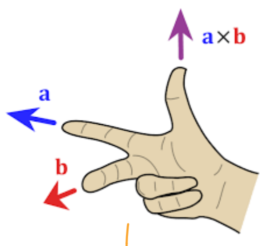
Ej: $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}$

$\hat{\phi} \times \hat{\theta} = -\hat{r}$

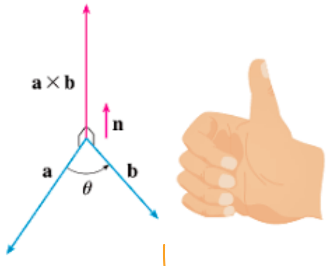
⚠ El producto cruz entre un mismo vector es 0

Regla de la mano derecha

otra técnica para calcular los productos. Hay 2 formas. Solo funciona con la derecha!



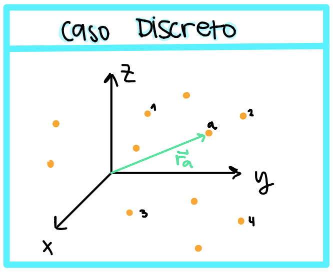
El dedo índice y el anular serán los vectores, y el dedo pulgar el resultado.

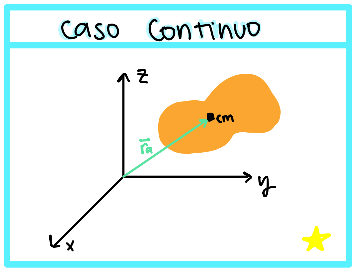


En este hay que "barrer" el ángulo que se forma entre los vectores, desde el primero hasta el 2do, y el pulgar será el resultado.

Solido rigido

Hasta ahora hemos trabajado con particulas puntuales. ¿Pero que pasa con sistemas de muchas particulas? Hay dos casos:


Caso Discreto


Caso Continuo

Podemos describir y estudiar estos sistemas con algunos parametros

Masa la masa total del sistema

discreto

$$M = \sum_{a=1}^{n} m_a$$

número de particulas

masa de cada particula

continuo

$$M = \int_{v} dm$$

diferencial de masa

Esto es una integral múltiple. va a depender de cuantas dimensiones tenga el cuerpo.

centro de masa Es la posición de un punto que representa a la masa total del sistema

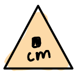
discreto

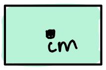
$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^{n} m_a \cdot \vec{r}_a$$

continuo

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int dm \cdot \vec{r}$$

Para poligonos regulares, el centro de masa está en el centro de la figura.





Matrices de inercia caracteriza la inercia rotacional cuando un sólido gira entorno a algún eje.

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & \boxed{I_{xz}} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

cada componente nos indica cómo afecta la distribución de masa en x para la rotación en z.

Es siempre una matriz 3×3 simétrica

¿Como se calculan los componentes de la matriz?

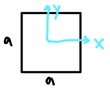
Nos indica respecto a qué origen se calcula.

$$\boxed{I_{ij}^{o} = \int_{v} (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j)\, dm}$$

Todos estos términos tienen una explicación:

- **r:** Es un vector que indica una posición arbitraria en el cuerpo.

Ej:



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} \quad \text{con} \begin{cases} x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \\ y \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \end{cases}$$

Es importante poner estos límites en la integral.

- **r_i, r_j:** son los componentes i y j del vector $\vec{r}$.

En este ejemplo, $r_i = x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$, $r_j = y \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$

- **δ_{ij}:** Es el delta de Kronecker. Solo puede tomar dos valores

$$\boxed{\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}}$$

- **dm:** El un diferencial de masa. Se puede ver como una porción muy chiquitita de masa.

La idea es escribirlo en función de las dimensiones que tiene el cuerpo. por ejemplo:

Si el cuerpo es plano: Estamos estudiando una superficie.

sabemos que $\sigma = \frac{m}{A}$ → masa → área de la superficie.

densidad superficial

$$\Rightarrow \sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{dm}{\underbrace{dxdy}} \Rightarrow dm = \sigma\, dx dy$$

↳ producto para sacar el área

Si el cuerpo es en 3D: Estamos estudiando un volumen.

sabemos que $\rho = \frac{m}{V}$ → masa → volumen

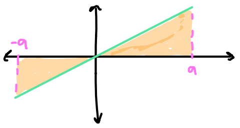
$$\Rightarrow \rho = \frac{dm}{dV} = \frac{dm}{dxdydz} \Rightarrow dm = \rho\, dxdydz$$

La cantidad de diferenciales que nos queden indicarán cuantas integrales son.

↳ Si los límites de las integrales son independientes entre sí, las integrales se pueden separar, distribuir, etc

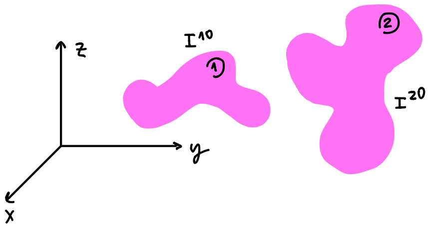
☆ Las integrales simétricas de funciones impares siempre son 0.

$$\int_{a}^{-a} f(x)dx = 0$$



Algunas propiedades de las matrices de inercia...

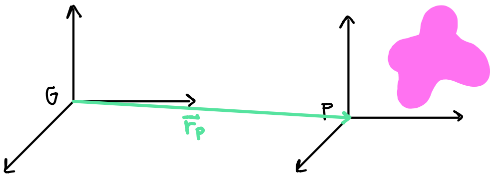
Aditividad si tenemos 2 cuerpos sólidos, la matriz de inercia del sistéma es la suma de las dos matrices de inercia por separado.



$$\boxed{I_{ij}^{0} = \underbrace{I_{ij}^{10} + I_{ij}^{20}}}$$

Las matrices tienen que estar calculadas con respecto al mismo origen.

Teorema de Steiner si tenemos la matriz de inercia con respecto a un origen P y queremos calcularla con respecto a otro origen G, podemos usar este teorema.

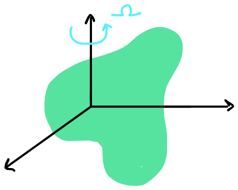


$$\boxed{I_{ij}^{P} = I_{ij}^{G} + M(r_G^2 \delta_{ij} - r_{Gi} r_{Gj})}$$

masa total

matriz de inercia con respecto al origen inicial.

Momento angular El momento angular de un sólido rigido está dado por



$$\boxed{\vec{l}_0 = I^{0} \vec{\Omega}}$$

Este vector es la velocidad angular por el vector base sobre el que se está girando.

Algunos Tips

Cuando estámos trabajando con dinámica...

- El peso y la normal actúan sobre el centro de masas.
- La fuerza de roce actúa sobre el punto de contacto del sólido con la superficie.

¿Como poner el sistéma de referencia?

- Si el problema dice que el cuerpo está fijado a algo en algún punto, en general es conveniente poner el origen del sistéma de referencia ahí.
- Si el cuerpo tiene ejes de simetría, conviene poner el sistéma de referencia de forma de que quede simétrico.
- En el resto de los casos poner el origen en el centro de masas es lo más conveniente. ᵕ̈