Auxiliar 27

Sólido rígido II

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi
Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

P1.-

Utilizando el teorema de Steiner, calcule los tensores de inercia de los siguientes casos:

a) [**Propuesto**] Una barra de largo L y masa M con respecto a uno de sus extremos

b) [**Propuesto**] Una esfera de radio R y masa M con respecto a un punto en su superficie

c) Un disco de radio R y masa M con respecto a un punto que, medido desde este punto, el centro de masa se encuentra a una distancia $\vec{r}_{\text{CM}} = (r_{\text{CM}x}, r_{\text{CM}y}, r_{\text{CM}z})$

Considere para los 3 casos que la densidad de masa es uniforme en todos los objetos.

P2.-

Considere un disco de radio R y masa M (homogéneamente distribuida) colocado en forma vertical. El sistema puede girar con roce despreciable alrededor de un eje $\mathcal{O}$ horizontal que pasa a una distancia $R/2$ del centro del disco. Inicialmente, el disco se encuentra en reposo, sujeto a una cuerda fija al punto P (ver figura)

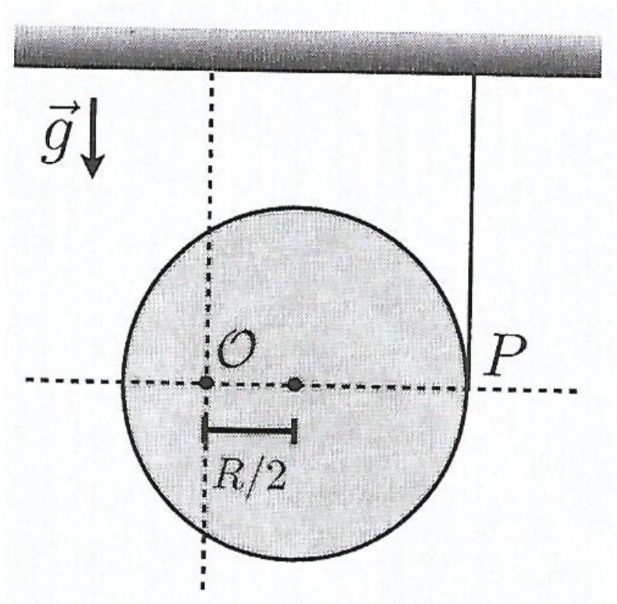
a) Calcule el tensor de inercia del disco con respecto al punto $\mathcal{O}$ por donde pasa el eje horizontal

b) Calcule la tensión de la cuerda

Ahora considere que se corta la cuerda, se pide lo siguiente:

c) Determine la velocidad angular máxima del disco en su movimiento

d) Encuentre la expresión de la fuerza que ejerce el pivote $\mathcal{O}$ sobre el disco para todo ángulo ϕ medido desde la vertical al eje $\mathcal{O} - \text{CM}$



Formulario

Tensor de inercia

Para un sólido rígido con una distribución continua (no necesariamente homogénea) de masa, su tensor de inercia (tomando como pivote/origen un punto $\mathcal{O}'$) se calcula como

$$I_{\mathcal{O}'} = \int \begin{pmatrix} (y')^2 + (z')^2 & -x'y' & -x'z' \\ -y'x' & (x')^2 + (z')^2 & -y'z' \\ -z'x' & -z'y' & (x')^2 + (y')^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}m'$$

que también se puede escribir como

$$I^{ij}_{\mathcal{O}'} = \int (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j)\, \mathrm{d}m \ , \text{ con } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

donde $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
El diferencial de masa se expresa de distintas formas según si el sólido es lineal, superficial o volumétrico

$$\mathrm{d}m' = \lambda\, \mathrm{d}l' \ , \quad \mathrm{d}m' = \sigma\, \mathrm{d}A' \ , \quad \mathrm{d}m' = \rho\, \mathrm{d}V' \ .$$

Teorema Steiner

Si tenemos calculado el tensor de inercia con respecto al CM, I_{CM}, podemos calcular el tensor de inercia con respecto a otro pivote/origen $\mathcal{O}$ usando el teorema de Steiner

$$I^{ij}_{\mathcal{O}} = I^{ij}_{\mathrm{CM}} + M_{\mathrm{tot}} \left[R^2_{\mathrm{CM}} \delta_{ij} - R_{\mathrm{CM}i} R_{j\mathrm{CM}} \right] \ , \text{ con } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

donde $\vec{R}_{\mathrm{CM}} = (R_{\mathrm{CM}1}, R_{\mathrm{CM}2}, R_{\mathrm{CM}3})$ es el vector posición que va desde $\mathcal{O}$ a CM.

Ecuaciones de movimiento

La relación entre el momentum angular y torque de un sólido rígido es:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau}$$

donde $\vec{L} = I_{\mathcal{O}}\vec{\Omega}$ con $I_{\mathcal{O}}$ el tensor de inercia medido c/r al pivote y $\vec{\Omega}$ el vector velocidad angular del cuerpo.

La segunda Ley de Newton para un sólido rígido se expresa como:

$$M_{\text{tot}}\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{\text{ext}}$$

con M_{tot} la masa total, $\vec{R}$ el vector posición del centro de masa y $\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}$ la suma de las fuerzas externas actuando sobre el sólido rígido.