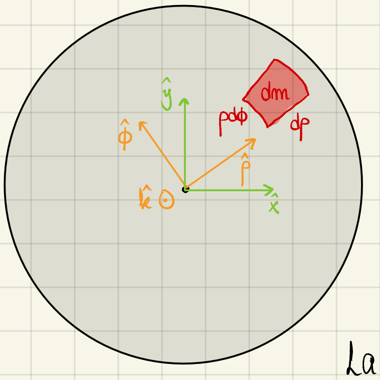
Auxiliar 27

P1

c) Primero calculamos el tensor de inercia de un disco (delgado) c/r a su CM que por simetría está justo al medio. Tenemos la fórmula

$$I^{ij}_{CM} = \int (r^2\delta_{ij} - x_i x_j)\, dm \qquad \text{(i indica la fila y j la columna)}$$



que está expresada en coord. cartesianas, que definimos en el dibujo con verde y que tiene origen en el CM y con $\hat{k}$ perpendicular al disco, pero por la forma del objeto nos conviene expresar el sist. $\{\hat{x},\hat{y},\hat{k}\}$ en cilíndricas $\{\hat{\rho},\hat{\phi},\hat{k}\}$

$$x=\rho\cos\phi \;,\quad y=\rho\sin\phi\;,\quad z=0 \qquad (\Rightarrow r^2=x^2+y^2+z^2=\rho^2\cos^2\phi+\rho^2\sin^2\phi=\rho^2)$$

La masa está distribuida de forma homogénea $\Rightarrow \underbrace{\sigma}_{\text{constante}} = M/A = M/\pi R^2$, así que el diferencial de masa en coord. cilíndricas

$$dm=\sigma dA = \frac{M}{\pi R^2}\, d\rho\, \rho\, d\phi$$

Partamos calculando las componentes diagonales de I^{ij}_{CM}

- $I^{11}_{CM} = \int(\rho^2\delta_{11} - x_1x_1)\,dm = \frac{M}{\pi R^2}\iint(\rho^2-x^2)\,d\rho\,\rho\,d\phi = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R(\rho^2-\rho^2\cos^2\phi)\,d\rho\,\rho\,d\phi = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\,d\phi\int_0^R\rho^3 d\rho = \frac{MR^2}{4}$
- $I^{22}_{CM} = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R(\rho^2-\rho^2\sin^2\phi)\,d\rho\,\rho\,d\phi = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\,d\phi\int_0^R\rho^3d\rho = \frac{MR^2}{4}$
- $I^{33}_{CM} = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R(\rho^2-\cancel{z^2})\,d\rho\,\rho\,d\phi = \frac{MR^2}{2}$

noten que I_0 es simétrica siempre

Queda propuesto demostrar que los elementos fuera de la diagonal son 0, esto es común en objetos muy simétricos. También notamos que se cumple el teo. del eje perpendicular $I^{33}_{CM} = I^{11}_{CM} + I^{22}_{CM}$

$$\therefore\; I_{CM} = \begin{pmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2\end{pmatrix}$$

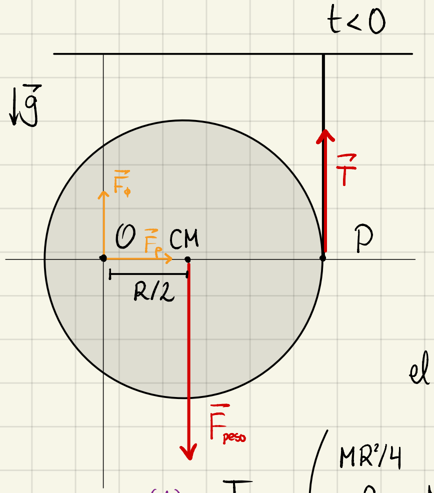
Ahora, si queremos calcular el tensor de inercia c/r a un origen O (manteniendo el mismo sist. cartesiano $\{\hat{x},\hat{y},\hat{k}\}$ que usamos para el CM, solo que trasladado sin rotar los ejes), donde el CM está a una distancia $\vec{r}_{OCM}=(r_x,r_y,r_z)$ desde O, ocupamos teo. de Steiner

$$I^{ij}_O = I^{ij}_{CM} + M(r^2_{OCM}\delta_{ij} - r_{OCM\,i}\, r_{j\,OCM})$$

que en forma matricial sería

$$I_O = \begin{pmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2\end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} r_y^2+r_z^2 & -r_xr_y & -r_xr_z \\ -r_yr_x & r_x^2+r_z^2 & -r_yr_z \\ -r_zr_x & -r_zr_y & r_x^2+r_y^2\end{pmatrix} \quad (*)$$

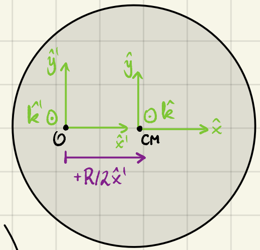
P2



a) En la P1 ya calculamos el tensor de inercia para un disco delgado de radio R y masa M distribuida homogéneamente. Además encontramos la expresión general para hacerle Steiner al I_{cm} de este objeto, en este caso la traslación de origen es

$$\vec r_{OCM} = (\underbrace{R/2}_{r_x}, \underbrace{0}_{r_y}, \underbrace{0}_{r_x})$$

(mirar el dibujo de la derecha, este $\vec r_{OCM}$ tiene que estar definido en el sist. $\{\hat x', \hat y', \hat k'\}$ que es igual al de CM, pero trasladado). Así que I_O sería



$$(*):\ I_O = \begin{pmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & R^2/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3MR^2/4 \end{pmatrix}$$

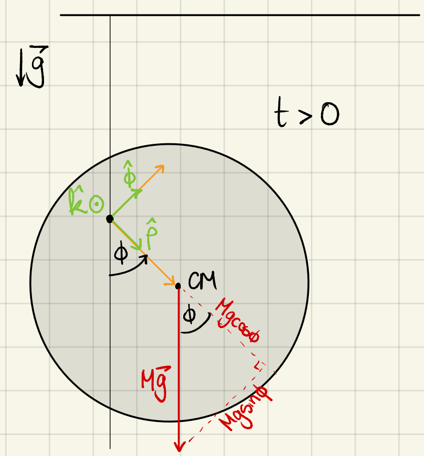
b) Para calcular la tensión de la cuerda usaremos $d\vec L/dt = \vec \tau$ usando como pivote O, de esta forma nuestra ec. no tendrá las fuerzas ejercidas por el pivote, $\vec F_\phi$ y $\vec F_\rho$. Como el disco está quieto cuando está atado a la cuerda $\vec L = \vec 0$, así que solo calculamos el torque de las fuerzas externas

$$\vec\tau = \sum_i \vec\tau_i = \vec r_1 \times \vec F_1 + \vec r_2 \times \vec F_2 = \frac{R}{2}\hat\rho \times (-Mg\hat\phi) + \frac{3R}{2}\hat\rho \times T\hat\phi = -\frac{R}{2}Mg\,\hat k + \frac{3R}{2}T\,\hat k$$

$$\therefore\ 0 = -\frac{R}{2}Mg + \frac{3R}{2}T \iff \boxed{T = \frac{Mg}{3}}$$

c) Necesitamos la ec. de movimiento, así que ocuparemos $d\vec L/dt = \vec\tau$, donde la única fuerza externa (que ejerce torque) es la gravitacional y el momentum angular se calcula como

$$\vec L = I_O \cdot \vec\Omega(t)$$



donde $\vec\Omega(t)$ es el vector velocidad angular con el que rota el sólido rígido.
Notemos que ahora tenemos una especie de péndulo que rota únicamente c/r a $\hat k$

$$\Rightarrow \vec\Omega = (0, 0, \dot\phi(t))$$

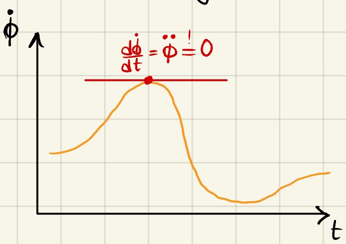
Así que el momentum angular sería

$$\vec L = \begin{pmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3MR^2/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3MR^2\dot\phi/4 \end{pmatrix}$$

y el torque producido por la gravedad sería $\vec\tau = \frac{R}{2}\hat\rho \times (-M\vec g) = \frac{R}{2}\hat\rho \times (Mg\cos\phi\,\hat\rho - Mg\sin\phi\,\hat\phi) = -\frac{MgR}{2}\sin\phi\,\hat k$

$$\therefore\ \frac{d\vec L}{dt} = \vec\tau \iff \frac{3MR^2}{4}\ddot\phi\,\hat k = -\frac{MgR}{2}\sin\phi\,\hat k \Rightarrow \ddot\phi + \frac{2}{3}\frac{g}{R}\sin\phi = 0 \quad (1)$$

La velocidad angular máxima se da cuando su derivada temporal es 0, osea imponemos $\ddot{\phi}(t^*) \overset{!}{=} 0$ en la ec. de mov.



$$(1): \quad 0 + \frac{2g}{3R} \sin\phi^* = 0 \Rightarrow \sin\phi^* = 0 \Rightarrow \phi^* = 0 \quad (\text{físicamente})$$

Ahora, ocupando truco de mecánica en (1) considerando $\phi(t=0) = \pi/2$ y $\dot{\phi}(t=0) = 0$

$$(1): \quad \int_0^{\dot{\phi}} \dot{\phi}\, d\dot{\phi} = -\frac{2g}{3R} \int_{\pi/2}^{\phi} \sin\phi\, d\phi \iff \frac{\dot{\phi}^2}{2} = \frac{2g}{3R} \cos\phi \quad (2)$$

así que evaluando (2) en $\phi^* = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{\dot{\phi}_{max}^2}{2} = \frac{2}{3}\frac{g}{R} \cos(0) \Rightarrow \boxed{\dot{\phi}_{max} = +\sqrt{\frac{4g}{3R}}}$

d) Usando torque y momentum angular no conseguimos expresar la fuerza ejercida por el pivote, así que recurrimos a segunda Ley de Newton con CM

$$M_{tot} \ddot{\vec{R}}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$$

donde tomando como origen O con coord. cilíndricas tenemos

$$\vec{R}_{CM} = \frac{R}{2}\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R}}_{CM} = \frac{R}{2}\dot{\phi}\hat{\phi} \Rightarrow \ddot{\vec{R}}_{CM} = \frac{R}{2}\ddot{\phi}\hat{\phi} - \frac{R}{2}\dot{\phi}^2\hat{\rho}$$

y luego de cortarse la cuerda las únicas fuerzas externas son: la fuerza del pivote y la gravitacional

$$M\left(\frac{R}{2}\ddot{\phi}\hat{\phi} - \frac{R}{2}\dot{\phi}^2\hat{\rho}\right) = F_\rho\hat{\rho} + F_\phi\hat{\phi} + Mg\cos\phi\,\hat{\rho} - Mg\sin\phi\,\hat{\phi}$$

por lo que las ecs. de mov. escalares son:

$$\hat{\rho}) \; -\frac{MR}{2}\dot{\phi}^2 = F_\rho + Mg\cos\phi \qquad \hat{\phi}) \; \frac{MR}{2}\ddot{\phi} = F_\phi - Mg\sin\phi \qquad \hat{k}) \; 0 = 0$$

reemplazamos (1) y (2) en $\hat{\rho}$) y $\hat{\phi}$) para expresar las fuerzas en función del ángulo ϕ

$$\boxed{\vec{F}_{piv} = \vec{F}_\rho\hat{\rho} + F_\phi\hat{\phi} = \left[-\frac{MR}{2}\underbrace{\frac{4g}{3R}\cos\phi}_{(2)} - Mg\cos\phi\right]\hat{\rho} + \left[\frac{MR}{2}\cdot\underbrace{\left(-\frac{2g}{3R}\sin\phi\right)}_{(1)} + Mg\sin\phi\right]\hat{\phi}}$$